

CHAPITRE 6

Ensembles et applications

1. ENSEMBLES, PARTIES D'UN ENSEMBLE

1.1. Généralités

Définition 1 | Ensemble

On appelle **ensemble** toute collection d'objet. Si un élément x appartient à l'ensemble E , on note $x \in E$. Sinon on note $x \notin E$.

Exemple 1 — Ensembles classiques de $\mathbb{R}$ L'ensemble des nombres réels se note $\mathbb{R}$. Il contient plusieurs sous ensembles à connaître :

1. $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
2. $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs
3. $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c'est à dire l'ensemble des nombres qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$
4. $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux : c'est les nombres qui s'écrivent $\frac{n}{10^k}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2 — Ensembles finis Les ensembles qui contiennent un nombre fini d'éléments se note $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ où les x_i sont les éléments de l'ensemble. Cet ensemble contient n éléments, on dit qu'il est de cardinal n et on note

$$\text{card}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) = n.$$

Exemple 3 — Ensemble vide L'unique ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'ensemble vide. On le note $\emptyset$. Tout élément x vérifie alors $x \notin \emptyset$. L'ensemble vide n'est pas particulièrement intéressant à étudier, mais il sert à décrire des situations impossibles. Par exemple l'ensemble des entiers à la fois pairs et impairs est l'ensemble vide.

Tous les ensembles ne sont pas des ensembles de nombres, il existe par exemple :

1. les ensembles de fonctions $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui même,
2. $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles.
3. $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ est l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, 2\}$. Il est de cardinal 4.

Remarque 1.1 — $\{\emptyset\}$ est un ensemble d'ensembles, qui ne contient que l'ensemble vide comme élément. Il est de cardinal 1.

Pour définir un ensemble au delà des ensembles de référence, il y a principalement deux méthodes :

1. la description par extension : il s'agit de décrire explicitement l'ensemble à partir d'un ou d'autres ensemble. Par exemple

$$\{2k, k \in \mathbb{Z}\}$$

est l'ensemble des entiers relatifs pairs. En général, un tel ensemble s'écrit

$$\{f(x), x \in X\} \text{ où } X \text{ est un ensemble donné et } f \text{ une fonction.}$$

2. la description par compréhension : il s'agit de décrire un ensemble comme les éléments d'un ensemble donné vérifiant une certaine propriété. Formellement cela s'écrit

$$\{x \in X, P(x)\} \text{ où } P(x) \text{ est une proposition logique.}$$

Par exemple

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\}$$

est l'ensemble des réels pour lesquelles l'égalité $\cos(x) = 0$ est vraie.

Exemple 4 — Décrire l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\}$ par une présentation par extension.

On sait que $\cos(x) = 0$ si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Ainsi

$$\{x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.2. Sous-ensemble, parties d'un ensemble

Dans cette partie, E est un ensemble quelconque.

Définition 2 | Sous-ensemble

Soit F un ensemble, on dit que $F \subset E$ (que F est inclus dans E) si

$$\forall x \in F, x \in E.$$

Remarque 1.2 — On dit aussi que

- F est une partie de E ,
- F est un sous-ensemble de E .

Définition 3 | Ensemble des parties de E

On appelle **ensemble des parties** de E et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble formé par tous les sous ensembles de E .

Remarque 1.3 — On a équivalence entre

1. $F \subset E$,
2. $F \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 5 — Les ensembles suivants sont des parties de $\mathbf{R}$:

- les entiers naturels $\mathbf{N}$,
- les réels positifs $\mathbf{R}_+$,
- les intervalles $[a, b]$ (et les autres intervalles ...)
- plein d'autres (imaginons $\{2\} \cup]3, 5] \cap \mathbf{Q}$).

1.3. Opérations sur les ensembles

Si $F \subset E$ et $G \subset E$ sont des parties de E , on peut réaliser différentes opérations pour construire d'autres parties de E .

Définition 4 | Opérations sur les ensembles

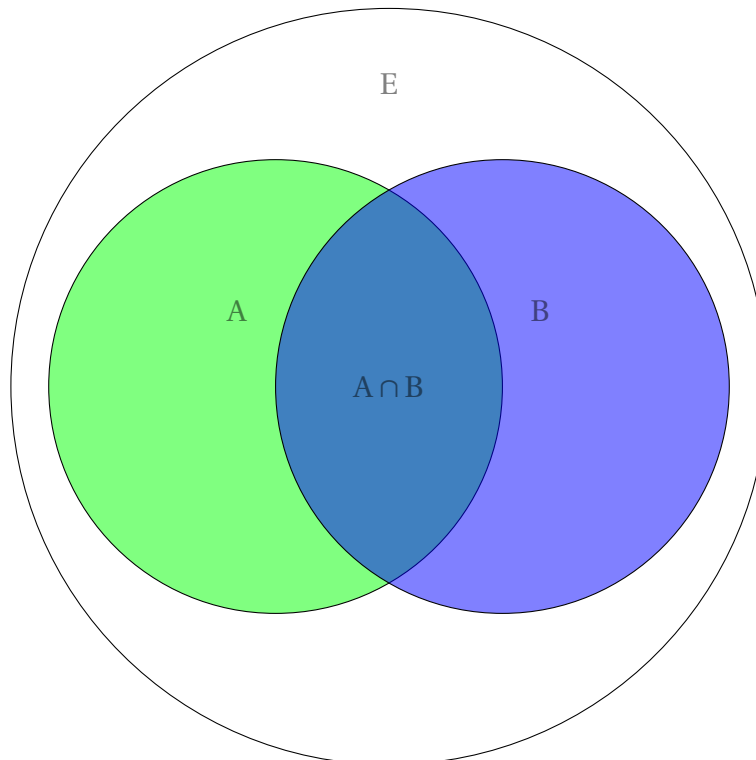
Soient F et G deux parties de E . On définit :

- le complémentaire de F , noté $\bar{F}$ (ou $E \setminus F$) : $\bar{F} = \{x \in E : x \notin F\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F .
- l'union, notée, $F \cup G = \{x \in E : x \in F \text{ ou } x \in G\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent au moins à F ou G . On le prononce "F union G" ou "l'union de F et G".
- l'intersection, notée, $F \cap G = \{x \in E : x \in F \text{ et } x \in G\}$. C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à F et à G . On le prononce "F inter G" ou "l'intersection de F et G".

- si $F \subset G$, on peut définir $G \setminus F = \{x \in G, x \notin F\}$ que l'on appelle "G privé de F".

Remarque 1.4 — Pour tout ensemble E :

- $\overline{\overline{E}} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = E$
- si $F \subset E$, $\overline{\overline{F}} = F$



Attention

L'union correspond au "OU" logique, qui n'est pas exclusif.

Remarque 1.5 —

- le complémentaire correspond au "NON" logique,
- l'intersection correspond au "ET" logique.

Exemple 6 — Déterminer :

1. $] -5, 2[\cap \mathbb{R}_+$

2. $] -\infty, 0] \cup \mathbf{R}_+^*$
3. $\overline{\mathbf{R}_+}$.

Proposition 1 | Distributivité

Soient A, B, C des parties de E . Alors :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Théorème 1 | Lois de de Morgan

Soient A et B deux parties de F , on a

1. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
2. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Σ Vocabulaire

Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E . Si

1. $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$ (l'union des ensembles donne l'ensemble complet)
2. pour tout i, j des indices avec $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (les parties sont deux à deux disjointes),

alors on dit que les sous-parties A_i forment une partition de E . Par exemple si $A \subset E$, alors A et $\overline{A}$ forment toujours une partition de E . Il sera très utile, notamment en probabilités, de trouver des partitions d'ensembles.

Remarque 1.6 — Ces lois ont en mettre en lien avec les formules propositionnelles

1. $\text{non}(P \text{ OU } Q) = (\text{non } P) \text{ ET } (\text{non } Q)$,
2. $\text{non}(P \text{ ET } Q) = (\text{non } P) \text{ OU } (\text{non } Q)$.

Le lien est même exact en prenant les propositions

- $P : x \in A$,
- $Q : x \in B$.

Définition 5 | Produit cartésien

Si E et F sont deux ensembles, on peut former un autre ensemble appelé leur **produit cartésien** (ou simplement produit) $E \times F$. C'est l'ensemble des couples formés d'un élément de E d'un élément de F , ou encore

$$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}.$$

Remarque 1.7 — En terme de quantification, c'est la même chose d'écrire

$$\forall (x, y) \in E \times F \text{ ou } \forall x \in E, \forall y \in F.$$

Remarque 1.8 — On peut le faire avec un nombre quelconque d'ensemble : par exemple $E \times F \times G$ est l'ensemble des triplets (x, y, z) avec $x \in E, y \in F, z \in G$.

Définition 6 | Ensemble E^n

Si $n \geq 1$ est un entier, on peut considérer les produits $E^n = E \times \cdots \times E$ où l'ensemble E est répété n fois. C'est l'ensemble des n -uplets

$$\{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in E, \dots, x_n \in E\}.$$

Exemple 7 — On a déjà rencontré $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^3$ respectivement les ensembles de couples et de triplets de nombres réels. De même, on peut définir $\mathbf{R}^n$ l'ensemble des n -uplets de réels. Par exemple $(1, 1, 1, \dots, 1)$, où 1 est répété n fois, est un élément de $\mathbf{R}^n$.



Méthode (Montrer que deux ensembles sont égaux)

Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on a deux solutions.

Méthode 1 : raisonner par équivalence. C'est une méthode directe. Dans certains cas c'est la plus rapide, mais elle peut mener à des erreurs de raisonnement si on se trompe sur les équivalences.

1. On fixe un élément quelconque $x \in E$.
2. On écrit la définition de $x \in E$.
3. On "déroule des équivalence" en espérant arriver à $x \in F$ à la fin.

Méthode 2 : raisonner par double inclusion. Pour montrer qu'un ensemble $E = F$, on montre séparément que $F \subset E$ et $E \subset F$. Ici dans chacune des étapes on peut raisonner par implication, ce qui est moins dangereux que raisonner par équivalence.

Exemple 8 — Soient $A = \{n - 1, n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq -1\}$. Montrer que $A = B$.

On raisonne par double inclusion :

$A \subset B$. Soit $x \in A$, montrons que $x \in B$. $x \in A$ signifie qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n - 1$. Ainsi $x \in \mathbb{Z}$ car c'est la différence entre deux entiers. De plus, comme $n \geq 0$, $n - 1 \geq -1$ donc $x \geq -1$. Ainsi $x \in B$. C'est vrai quelque soit $x \in A$, donc $A \subset B$.

$B \subset A$. Soit $x \in B$. Montrons que $x \in A$, c'est à dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = n - 1$. Cherchons n :

$$x = n - 1 \iff n = x + 1.$$

Comme $x \in \mathbb{Z}$, $n = x + 1$ est bien un entier, et comme $x \geq -1$, $n \geq 0$, donc $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $n = x + 1$ convient, donc $x \in A$. C'est vrai quelque soit $x \in B$, donc $B \subset A$.

Par double inclusion, on a montré que $A = B$.

1.4. Cas du cardinal fini

Définition 7 | Ensemble fini, cardinal

Un ensemble E est dit **fini** s'il est en bijection avec un ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas là, l'entier n est unique et on l'appelle cardinal de E , noté $n = \text{card}(E)$.

Remarque 1.9 — Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Proposition 2

Soient A et B deux ensembles de cardinal fini. Si $A \subset B$ alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.

Dans la suite de cette partie, E est un ensemble de cardinal n .

Proposition 3 | Parties de E

Soit E un ensemble de cardinal n et $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il y a exactement $\binom{n}{p}$ parties de E qui sont de cardinal p .

Proposition 4

Soit E un ensemble de cardinal n , alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble de cardinal 2^n .

Preuve Comme les parties de E ont entre 0 et n éléments, le nombre total de parties de E est

$$\begin{aligned} \text{card} \mathcal{P}(E) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Proposition 5

Soient A et B deux parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B).$$

Proposition 6

Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = m$ alors

1. $\text{card}(E \times F) = m \times n$,
2. $\text{card}(\mathcal{F}(E, F)) = m^n$.

Exemple 9 — Si $E = \{A, B\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$ alors

$$E \times F = \{(A, 0), (A, 1), (A, 2), (B, 0), (B, 1), (B, 2), \}.$$

On obtient bien $2 \times 3 = 6$ éléments.

2. APPLICATIONS

Dans toute cette partie, E, F et G sont des ensembles.

Définition 8 | Application de E dans F

Une application f de E dans F est l'association de tout élément $x \in E$ à un unique élément $f(x) \in F$.

Σ

Vocabulaire

Soit f une application de E dans F .

1. Soit $x \in E$. L'image de x par f est l'élément $f(x)$ de F .
2. Soit $y \in F$. On dit que $x \in E$ est un antécédent de y par f si $f(x) = y$.

Remarque 2.1 — L'ensemble des applications (ou des fonctions) de E dans F est un ensemble, parfois noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Exemple 10 — L'application de E dans E qui à un élément x associe toujours le même élément x s'appelle **l'application identité de E dans E** . On la note Id_E .

Exemple 11 — Les fonctions réelles sont les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ (donc avec $E = F = \mathbf{R}$).

Définition 9 | Image d'une application

Soit f une application de E dans F . L'image de E par f est l'ensemble

$$f(E) = \{f(x), x \in E\}.$$

Exemple 12 — Si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est l'application définie par $f(x) = x^2$, alors $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$.

Définition 10 | Image directe d'une partie

Soit $f : E \rightarrow F$ une application entre deux ensembles.

Si $A \subset E$ est une partie de E , l'**image (ou image directe)** de A par f est l'ensemble

$$f(A) = \{f(x) \in F : x \in A\}.$$

C'est un sous-ensemble de F . Il est caractérisé par

$$y \in f(A) \iff \exists x \in A : f(x) = y.$$

Exemple 13 — Soit $f : x \mapsto x^2$ la fonction carrée sur $\mathbf{R}$.

1. L'image directe de $[-2, 4[$ est $f([-2, 4[) = [0, 16[$.
2. L'image réciproque de $[2, +\infty[$ est $f^{-1}([2, +\infty[) =]-\infty, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$.

Définition 11 | Composée de deux applications

Soit f une application de E dans F et g une application de F . Alors on peut définir la composée de f et g par

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$

C'est une application de E dans G .

Remarque 2.2 — Pour définir $g \circ f$, il suffit que g soit définie sur $f(E) \subset F$ et pas forcément sur F tout entier.

Exemple 14 —

1. soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \cos(x^2 + 1)$ et $g = \exp$ la fonction exponentielle. On peut bien définir $g \circ f$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.
2. soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$, et $\ln$ la fonction logarithme népérien définie sur $]0, +\infty[$. On peut définir $\ln \circ f$ sur $\mathbf{R} \setminus [-1, 1]$ car c'est le domaine sur lequel f est strictement positive, donc $f(x)$ est dans le domaine de $\ln$.

2.1. Applications injectives, surjectives, bijective

Définition 12 | Application surjective

Une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** si $g(E) = F$. (C'est à dire que tous les éléments de F sont dans l'image de E , ou encore que tout élément de F admet un **antécédent** par f .).



Méthode (Montrer qu'une application est surjective)

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, il faut montrer que

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

1. On fixe un élément quelconque de $y \in F$.
2. On cherche un $x \in E, f(x) = y$, par exemple en résolvant une équation.
3. On conclut que f est surjective.

Exemple 15 — On veut montrer que $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $x^3 + 1$ est surjective.

Soit $y \in \mathbf{R}$, cherchons un réel x tel que $f(x) = y$, autrement dit $y = x^3 + 1$ donc $x = \sqrt[3]{y-1}$. Comme x existe pour tout réel y , on conclut que f est surjective.

Remarque 2.3 — Avec les théorèmes de continuité (comme le Théorème des Valeurs Intermédiaires que nous reverrons), on peut montrer qu'une fonction est surjective en étudiant son tableau de variation.

Remarque 2.4 — Montrer qu'une application n'est pas surjective est très simple. En effet la négation de la propriété

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$$

est une proposition en "il existe". Il suffit donc de trouver un élément de y de F qui n'est jamais atteint par f . Par exemple on peut dire $\exp : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ n'est pas surjective car -1 n'appartient pas à l'image de f (ou autrement dit, -1 n'a pas d'antécédent).

Remarque 2.5 — La notion de surjectivité dépend de ce qu'on prend pour ensemble d'arrivée. Ainsi un tableau de variation montre aisément que $\exp : \mathbf{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est surjective.

Définition 13 | Application injective

Une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$. (C'est à dire que deux éléments distincts de E auront une image différente par f .)

**Méthode (Montrer qu'une application est injective)**

Pour prouver qu'une application est injective, on utilise souvent la **contraposée** de la définition. C'est à dire que si $f(x) = f(y)$ alors $x = y$. On commence donc par supposer que $f(x) = f(y)$ et par raisonnement ou calcul on arrive à $x = y$.

Exemple 16 — Par exemple, montrons que l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est injective. Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\text{ donc } x^2 + 1 = y^2 + 1 \\ &\text{ donc } x^2 = y^2 \\ &\text{ donc } x = -y \text{ ou } x = y \\ &\text{ donc } x = y \text{ car } x \text{ et } y \text{ sont des réels positifs.} \end{aligned}$$

Donc $x = y$. Ainsi f est injective.

Théorème 2

Soit f une fonction réelle strictement monotone. Alors f est injective.

Remarque 2.6 — Il est facile de montrer qu'une application n'est pas injective : il suffit de trouver deux éléments x et y distincts de l'ensemble de départ qui ont la même image par f .

Définition 14 | Application bijective

Une application f de E dans F est **bijective** s'il existe une application g de F dans E telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$. C'est équivalent à l'assertion

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Remarque 2.7 — Une application bijective est aussi appelée une **bijection**. On dit aussi que E et F sont des ensembles *en bijection*.

Σ Notation

La fonction g est appelée **bijection réciproque** de f , notée souvent f^{-1} .

Théorème 3

Une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

🔧 Méthode (*Montrer qu'une application est bijective*)

Pour montrer que qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on a deux méthodes.

Méthode 1. On montre que f est injective et surjective.

Méthode 2. On prouve l'assertion

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, f(x) = y.$$

Pour cela

1. On fixe y quelconque un élément de F .
2. On prouve qu'il existe un unique $x \in E$, $f(x) = y$, parfois en résolvant l'équation $y = f(x)$.

Remarque 2.8 — Une étude de fonction, et un tableau de variations, peut aussi prouver qu'une fonction est bijective. Cela sera un Théorème dans un chapitre ultérieur.

Remarque 2.9 — La méthode par la résolution de l'équation est la seule qui donne une formule explicite pour la réciproque. Attention, on ne trouve pas toujours de formule explicite; c'est pour cela que l'on a introduit la fonction arctangente par exemple, qui était définie comme la réciproque de tangente sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$.

Remarque 2.10 — Dans l'exemple $f : x \in \mathbf{R} \mapsto x^3 + 1 \in \mathbf{R}$, on a en fait montré la bijectivité par la deuxième méthode. Celle-ci a l'avantage de nous donner une formule pour $f^{-1}(y)$. Ici $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$.

Remarque 2.11 — Il est facile de montrer qu'une fonction n'est pas bijective, il suffit de montrer qu'elle n'est pas surjective ou qu'elle n'est pas injective.

Remarque 2.12 — On peut résumer les propriétés d'injectivité / surjectivité / bijectivité ainsi : soit $f : E \rightarrow F$ une application, alors elle est

1. **injective** si pour tout y dans F , y admet **au maximum** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet aucune ou une solution dans E .

2. **surjective** si pour tout y dans F , y admet **au moins** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet au moins solution dans E .

3. **bijjective** si pour tout y dans F , y admet **exactement** un antécédent par f . C'est à dire que pour tout $y \in F$, l'équation

$$y = f(x)$$

admet exactement une solution dans E .

Théorème 4

1. La composée de deux applications surjectives est surjective.
2. La composée de deux applications injectives est injective.
3. La composée de deux applications bijectives est bijective.

2.2. Le cas particulier du cardinal fini

Théorème 5 | Lien avec le cardinal

Soit f une application entre E et F deux ensembles de cardinal fini, alors

1. si f est surjective alors $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$
2. si f est injective alors $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$
3. si f est bijective alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$

Théorème 6

Soit E et F deux ensemble de cardinal fini. Ils sont en bijection si et seulement $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

Proposition 7

Soit E et F deux ensemble de même cardinal n . Si $E \subset F$ alors $E = F$.

Proposition 8

Si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = m$ alors $\text{card}(\mathcal{F}(E \times F)) = m^n$.