CHAPITRE 9

Aspect local de la continuité, rappels sur les limites

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur I un intervalle de $\mathbf{R}$.

1. LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT. CONTINUITÉ EN UN POINT.

Définition 1 | Limite d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Soit ℓ un réel. On dit que f admet ℓ pour limite en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Notation

On note cette limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Remarque 1.1 — Il est important de bien comprendre ce que cette définition veut dire cette définition :

1. ϵ est une ”marge d'erreur” arbitrairement petite,
2. α est un borne dépendant de ϵ qui assure que si x est assez proche de x_0, alors $f(x)$ est assez proche de ℓ.

Remarque 1.2 — On dit aussi que f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.

Remarque 1.3 — La définition précédente reste valable si x_0 est une borne de l'intervalle.

Définition 2 | Fonction continue en un point

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit $x_0 \in \mathrm{I}$.On dit que f est continue en x_0 si f admet $f(x_0)$ comme limite lorsque x tend vers x_0.

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et x_0 une extrémité de l'intervalle avec $x_0 \notin \mathrm{I}$. Si f admet une limite ℓ en x_0, alors f est **prolongeable par continuité** en x_0. C'est à dire que la fonction définie sur $\mathrm{I} \cup \{x_0\}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathrm{I} \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases}$$

est une fonction continue en x_0.

Exemple 1 — On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Comme

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0},$$

on a

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

Alors la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ \ell \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en 0. Comme par quotient, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.4 —

Théorème 1 | Unicité de la limite

Si f admet une limite en x_0, alors cette limite est unique.

On dit que f admet une limite finie en x_0 s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to x_0} = \ell.$$

Dans le cas contraire, on dit que f ne converge pas en x_0. Cependant, même dans ce cas là, plusieurs cas existent.

Définition 4 | Limite à droite, limite à gauche

Soit f une fonction définie sur $\mathrm{I} \subset \mathbf{R}$ un intervalle et soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Soit ℓ un réel.

1. On dit que f **admet ℓ pour limite à gauche** en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \alpha, x_0[, |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

2. On dit que f **admet ℓ pour limite à droite** en x_0 si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathrm{I} \cap]x_0, x_0 + \alpha], |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Proposition 1

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in \mathrm{I}$. f admet ℓ pour limite en x_0 si et seulement si f admet ℓ comme limite commune à gauche et à droite en x_0.

Exemple 2 — Soit f la fonction partie entière et $n \in \mathbb{Z}$. Alors f admet n pour limite à droite en n et $n-1$ pour limite à gauche en n. En particulier, f n'a pas de limite en n.

Notation

Si elles existent, les limites à gauche et à droite peuvent respectivement se noter

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Remarque 1.5 — Si x_0 est une extrémité de I, il suffit de considérer soit la limite à gauche soit la limite à droite pour avoir une limite.

Avant de passer aux opérations sur les limites, il nous reste à voir quelques extensions de la définition de limite que nous avons données. Elles rappelleront certains cas vus dans le secondaire.

Définition 5 | Cas où f est définie sur $\mathrm{I} \backslash \{x_0\}$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle privé d'un point $\mathrm{I} \backslash \{x_0\}$. On dit que f admet une limite en x_0 si elle admet une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$ à gauche et à droite en x_0. On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 par la valeur ℓ.

Exemple 3 — On a déjà vu la fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ dans ce cas là.

Définition 6 | Limite infinie en x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 une borne de I. On dit que

1. f tend vers $+\infty$ en x_0 si pour tout réel $A > 0$ il existe un intervalle de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,
$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \geqslant A.$$
Formellement cela s'écrit
$$\forall A > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \geqslant A.$$
2. f tend vers $-\infty$ en x_0 si pour tout réel $A < 0$ il existe un intervalle de la forme $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$,
$$\forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \leqslant A.$$
Formellement cela s'écrit
$$\forall m < 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha], f(x) \leqslant A.$$

Notation

Dans ces cas là on note
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Définition 7 | Cas des limites en l'infini

Soit $I = [a, +\infty[$ un intervalle. Soit f une fonction sur I. On dit que

1. f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Formellement cela s'écrit
$$\forall \epsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R} : x \geqslant M \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon.$$
2. f a pour limite $+\infty \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Formellement cela s'écrit
$$\forall A > 0, \exists M \in \mathbb{R} : x \geqslant M \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
3. f a pour limite $-\infty \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Formellement cela s'écrit
$$\forall A < 0, \exists M \in \mathbb{R} : x \geqslant M \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

On peut écrire les mêmes définitions en $-\infty$.

Définition 8 | Cas des limites en l'infini - 2

Soit $I = [-\infty, b]$ un intervalle. Soit f une fonction sur I. On dit que

1. f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]\ell - \epsilon, +\ell + \infty[$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x proche de $-\infty$. Formellement cela s'écrit
$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{R} : x \leqslant m \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon.$$
2. f a pour limite $+\infty \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de $-\infty$. Formellement cela s'écrit
$$\forall A > 0, \exists m \in \mathbb{R} : x \leqslant m \Rightarrow f(x) \geqslant A.$$
3. f a pour limite $-\infty \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty, m]$ finit par contenir toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Formellement cela s'écrit
$$\forall A < 0, \exists m \in \mathbb{R} : x \leqslant m \Rightarrow f(x) \leqslant A.$$

2. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE DES LIMITES, RAPPELS SUR LES ASYMPTOTES

Une courbe admet une droite comme asymptote si lorsque l'abscisse ou l'ordonnée tend vers l'infini, la distance entre la courbe et la droite tend vers 0. Dans cette partie, on considère f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative.

Asymptote verticale. La courbe C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ (avec $a \in I$) si a est une valeur interdite pour la fonction f au sens où soit :

1. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$,
3. $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ (ou inversement).

Exemple 4 — Les cas $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ et $f(x) = \frac{1}{x-a}$ correspondent aux deux cas principaux.

Asymptote horizontale. La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$ en $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

On a une définition analogue pour les asymptotes verticales en $-\infty$.

Exemple 5 — La fonction arctangente admet deux asymptotes horizontales : une en $+\infty$, d'équation $y = \frac{\pi}{2}$, et une en $-\infty$ $(y = -\frac{\pi}{2})$.

Asymptote oblique. Si la fonction tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en l'infini, il y a une chance que la courbe admette une asymptote oblique, d'équation

$$y = ax + b \text{ avec } a \neq 1.$$

C'est le cas si et seulement si (par exemple dans le cas $+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - ax - b = 0.$$

Pour que cela ait une chance d'arriver il est nécessaire que $\frac{f(x)}{x}$ ait une limite. a doit alors être égal à cette limite. En suite on calcule si $f(x) - ax$ admet une limite : si c'est le cas alors en posant $b = \lim f(x) - ax$, la droite d'équation $y = ax + b$ convient.

3. OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Proposition 2 | Sommes de limites

Si on connait les limites de f et g en x_0, alors on peut parfois déterminer la limite de $f + g$ en x_0.

$\lim_{x_0} f + g$	$\ell \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' \in \mathbf{R}$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$

Les "?" correspondent à des **formes indéterminées** : sans plus d'information on ne sait pas calculer la limite. On ne sait même pas s'il en existe une !

Proposition 3 | Produit de limites

Si on connait les limites de f et g en x_0, alors on peut parfois déterminer la limite de $f \times g$ en x_0.

$\lim_{x_0} f+g$	$\ell<0$	$\ell>0$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'<0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\ell\times\ell'$	$\ell\times\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	?	?
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$

Les "?" correspondent à des **formes indéterminées** : sans plus d'information on ne sait pas calculer la limite. On ne sait même pas s'il en existe une !

Remarque 3.1 — Du tableau pour les limites des produit, on peut déterminer le tableau pour les quotients en remarquant que $\lim f = +\infty \iff \lim \frac{1}{f} = 0^+$. ($0^+$ signifie "tend vers 0 par *valeurs positives*".

Proposition 4 | Limite de l'inverse

Si on connait les limites de f alors on peut parfois déterminer la limite de $\frac{1}{f}$ (à la condition que f soit non nulle sur un intervalle autour du point on calcule la limite).

$\lim_n f$	0 (sans précision)	0^+	0^-	$\lambda\in\mathbf{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_n \frac{1}{f}$	?	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{1}{\lambda}$	0^+	0^-

Proposition 5 | Limite du quotient

Si on connait les limites de f et g alors on peut parfois déterminer la limite de $\frac{f}{g}$ (à la condition que g soit non nulle sur un intervalle autour du point on calcule la limite).

$\lim_n(\frac{f}{g})$	$\ell<0$	$\ell>0$	0	0^+	0^-	$-\infty$	$+\infty$
$\ell'<0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell'>0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0	0	$-\infty$	$+\infty$
0	?	?	?	?	?	?	?
0^+	$-\infty$	$+\infty$	?	?	?	$-\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	$-\infty$	?	?	?	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	0^+	0^-	0	0^-	0^+	?	?
$+\infty$	0^-	0^+	0	0^+	0^-	?	?

Proposition 6 | Compatibilité avec la relation d'ordre

Soit f et g deux fonctions définies sur I telles que

1. pour tout $x\in\mathrm{I}$, $f(x)\leqslant g(x)$,
2. f et g admettent des limites en x_0.

Alors

$$\lim_{x\to x_0} f \leqslant \lim_{x\to x_0} g.$$

Remarque 3.2 — On peut remplacer l'hypothèse 1 par l'existence de $\delta>0$ tel

que
$$x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \leqslant g(x).$$

Remarque 3.3 — Attention, si on remplace l'hypothèse 2 par $f(x) < g(x)$, on garde une inégalité large $\lim_{x\to x_0} f \leqslant \lim_{x\to x_0} g$ dans la conclusion. Pas d'inégalité stricte ! Cela se voit en considérant sur $]0,1]$ les fonctions $f : x \mapsto 5$ et $g : x \mapsto 5 + x$. On a bien $f < g$ mais les deux fonctions ont la même limite en 0.

Théorème 2 | Existence de limites par encadrement

Soient f, g, h des fonctions définies sur I telles que
1. pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,
2. f et h admettent une limite commune ℓ en x_0.

Alors g admet une limite en x_0 et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Remarque 3.4 — Le théorème reste valable pour x_0 une borne de l'intervalle, éventuellement infinie.

Remarque 3.5 — On peut remplacer l'hypothèse 1 par l'existence de $\delta > 0$ tel que
$$x \in \mathrm{I} \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta], f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Le théorème d'existence de limites par encadrement admet quelques généralisations :

Proposition 7

1. Si $f(x) \leqslant g(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,
2. Si $f(x) \leqslant g(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$,
3. Si $|f(x)| \leqslant g(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Théorème 3 | Théorème de prolongement continu

Soit f une fonction continue définie sur un ensemble de la forme $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$. Si f admet une limite en x_0 alors f se prolonge en une fonction continue sur I au sens suivant : la fonction $\tilde{f}$ définie par
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in \mathrm{I} \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases}.$$

Exemple 6 —

1. La fonction définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 1.
2. La fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0.

Théorème 4

Si f admet une limite ℓ en x_0 et si (u_n) est une suite tendant vers x_0, alors $(f(u_n))$ admet une limite et

$$\lim f(u_n) = \ell.$$

Exemple 7 — Calculer

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Théorème 5 | Limite des fonctions composées

Soit f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J avec $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ (ou une extrémité). Si f admet une limite en x_0 et si g admet une limite en $\lim_{x \to x_0} f(x)$, alors $g \circ f$ admet une limite en x_0 et

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \lim_{\mathrm{X} \to \lim_{x_0} f(x)} g(\mathrm{X}).$$

Exemple 8 — Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} e^{x^2}$$

4. THÉORÈME DE LA LIMITE MONOTONE

Théorème 6 | Limites des fonctions monotones

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Alors quelque soit $x_0 \in]a, b[$ ou à f admet une limite finie à gauche en x_0 et une limite à droite en x_0 avec

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ dans le cas d'une fonction croissante, et}$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \leqslant f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0^-} f(x) \text{ dans le cas d'une fonction décroissante.}$$

f est continue en x si et seulement si ces limites sont égales.

Théorème 7 | Théorème de la limite monotone - version aux bornes

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Alors f admet une limite finie ou infinie en a, et f admet une limite finie ou infinie en b.

Corollaire 1

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $[a,b[$ (avec éventuellement $b = +\infty[$).

1. Si f est croissante alors on a l'alternative suivante :
   a) f a une limite finie en b (si f est majorée)
   b) $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ (si f n'est pas majorée).
2. Si f est décroissante alors on a l'alternative suivante :
   a) f a une limite finie en b (si f est minorée)
   b) $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ (si f n'est pas minorée).

Corollaire 2

Soit f une fonction monotone sur un intervalle $]a,b]$ (avec éventuellement $a = -\infty[$).

1. Si f est croissante alors on a l'alternative suivante :
   a) f a une limite finie en a (si f est minorée)
   b) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (si f n'est pas minorée).
2. Si f est décroissante alors on a l'alternative suivante :
   a) f a une limite finie en b (si f est majorée)
   b) $\lim_{x\to +a} f(x) = -\infty$ (si f n'est pas majorée).

5. INDÉTERMINATIONS CLASSIQUES

Dans les tableaux de limites, on a vu que certaines formes sont indéterminées. On va apprendre à en lever certaines.

5.1. Croissances comparées

Théorème 8

Soient a et b deux réels.

1. Si $a \neq 0$ alors
$$\lim_{x\to+\infty} x^a \ln(x)^b = \lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty \text{ si } a > 0 \\ 0 \text{ si } a > 0. \end{cases}$$
2. Si $a \neq 0$ alors
$$\lim_{x\to 0^+} x^a |\ln(x)|^b = \lim_{x\to 0^+} x^a = \begin{cases} +0 \text{ si } a > 0 \\ +\infty \text{ si } a < 0. \end{cases}$$
3. Si $b \neq 0$ alors
$$\lim_{x\to+\infty} x^a e^{bx} = \lim_{x\to+\infty} e^{bx} = \begin{cases} +\infty \text{ si } b > 0 \\ 0 \text{ si } b < 0. \end{cases}$$
4. Si $b \neq 0$ alors
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^a e^{bx} = \lim_{x\to-\infty} e^{bx} = \begin{cases} +\infty \text{ si } b < 0 \\ 0 \text{ si } b > 0. \end{cases}$$

Remarque 5.1 — Sans les conditions sur a et b imposées, les limites sont évidentes.

5.2. Autres indéterminations

Nombres dérivées Certaines limites indéterminées sont en fait des nombres dérivées. Si on arrive à écrire la fonction dont on calcule la limite comme

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

où g est une fonction dérivable en a, alors on aura

$$\lim_{x\to a} f(x) = g'(a).$$

Exemple 9 — Calculer les limites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x-1}.$$

Quotients de polynôme Soient P et Q deux fonctions polynomiales

$$\mathrm{P}(x) = a_d x^d + \cdots + a_v x^v$$

$$\text{et } \mathrm{Q}(x) = b_m x^m + \cdots + b_w x^w.$$

Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_d}{b_m}x^{d-m}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_d}{b_m}x^{d-m}.$$

On retiendra qu'à l'infini, le quotient de deux polynômes se comporte comme le quotient des termes de plus haut degré. A l'inverse, en 0 il se comporte le quotient des termes de plus petit degré :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{a_v}{b_w}x^{v-w}.$$

Exemple 10 — Déterminer les limites de

$$\frac{x^3-2x}{x^2+1}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine de Q (c'est à dire Q(α)), on ne peut a priori pas définir P/Q en α. Seulement si $P(\alpha) = 0$, on peut parfois s'en sortir. Supposons que α est une racine simple de Q, c'est à dire que $Q(x) = (x - \alpha)R(x)$ avec $R(\alpha) \neq 0$ et si $P(\alpha) = 0$. Alors

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P'(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

P/Q est une fonction prolongeable par continuité en α.

En effet

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{x - \alpha} \frac{x - \alpha}{Q(x)}$$

qui converge vers $\frac{P'(\alpha)}{Q'(\alpha)}$. Il faut quand même montrer que $Q'(\alpha) = 0$ que nous verrons dans le chapitre sur les polynômes.