TD 1 : Rappels de terminale, calculs

1. CALCULS

Exercice 1 Simplifier les calculs suivants

1. $5+2\times\frac{7}{3}$
2. $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{25}{12}}$
3. $\frac{12}{x-1}+\frac{3x-9}{x^2-1}-\frac{x^2}{x^3-x}$
4. $\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{12}{7}+\frac{11}{2}\right)$.

Exercice 2 Transformer chacune des expressions suivantes en expressions égales avec le moins de racines carrées possibles (notamment, on ne veut **aucune** racine carrée au dénominateur).

1. $A=\frac{5}{2-\sqrt{7}}$,
2. $B=\sqrt{64}+\sqrt{128}$,
3. $C=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$,
4. $D=\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$,
5. $E=\sqrt{12x^2-72x+108}$,
6. $F=\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}+\sqrt{7+2\sqrt{6}}\right)^2$,

Exercice 3 Simplifier les expressions suivantes

1. $A=(-1)^n\times(-1)^{n+1}\times(-1)^{n+2}$,
2. $B=\frac{2^4\times 4^2}{8\times 3^{-4}}$,
3. $C=\frac{3^{-2}2^{-2}}{3^{-7}2^2}$,
4. $D=x\sqrt{x}x^2\times 7\frac{x^2}{x^3}$.

2. RAPPELS SUR LES SUITES

Exercice 4 Parmi les suites suivante, déterminer lesquelles sont arithmétiques ou géométriques :

1. $u_n=3+5n$,
2. $v_n=12-\sqrt{n}$,
3. $w_n=-7^n$,
4. $x_n=\sqrt{2}^{2n+1}$,
5. $y_n=$ le n-ieme entier positif pair,
6. $z_n=\cos(n\pi)$
7. $z'_n=\sin(n\pi)$.

Exercice 5 Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.

1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

2. En déduire la valeur des sommes

$$2+4+6\cdots+2n \text{ et } 1+3+\cdots+2n+1.$$

Exercice 6 Déterminer une expression explicite, et éventuellement la limite, de la suite définie par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 10.$$

Exercice 7 On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

1. Calculer les premiers termes de la suite.
2. Conjecturer une formule pour u_n et la démontrer par récurrence.
3. On souhaite montrer le résultat précédent d'une autre façon. On définit une suite auxiliaire (v_n) par $v_n = \ln(u_n)$. Démontrer que cette suite et bien définie et géométrique. En déduire l'expression explicite de (u_n).

Exercice 8 On définit la suite (u_n) par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{e u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. En déduire une expression explicite pour (v_n) puis pour (u_n).
4. Peut-on déterminer une limite pour u_n ?

3. POLYNÔMES

Exercice 9 Réaliser l'étude complète des trinômes du second degré suivants : forme canonique, racines, variations, signe, courbe représentative.

1. $\mathrm{P}(x) = x^2 - 3x + 2$,
2. $\mathrm{Q}(x) = -3x^2 + 18x - 27$,
3. $\mathrm{R}(x) = -2x^2 + 4x - 7$.

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes en se ramenant à l'étude d'un polynôme du second degré :

1. $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$,
2. $-x^{10} + 3x^9 - 3x^8 = 0$,
3. $e^{6x} + 4e^{3x} = 1$.

4. ÉTUDES DE FONCTION

Exercice 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, en a $f'(x) = (2x - 5) \times e^{-x}$.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.

Exercice 12 Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau de variation de f.
3. En déduire que pour tout réel x, $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.