TD 12 - Fonctions dérivables

1. Dérivabilité

Exercice 1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$,
4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$,
6. $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

Exercice 2 Pour les fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition. Déterminer si elles sont continues, dérivables et de classe C^1 ainsi que si elles admettent un prolongement de ces régularités.

1. $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$,
2. $x \mapsto x\ln(x) - x$,
3. $x \mapsto x^x$,
4. $x \mapsto \sqrt{x^3 - x^2}$.

Exercice 3

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} x = 1 \\ \frac{x}{e^x-1} & \text{si} x \neq 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2. Dérivées et calculs

Exercice 4 Calculer les dérivées des fonctions dont les expressions sont $f(x) =$:

1. $\sin(x)^3$,
2. $\cos(x^2)$,
3. $\frac{1}{\ln(x)}$,
4. $\frac{1}{(x^2+1)^2}$,
5. $\frac{xe^{-x^2}}{x^2+1}$,
6. $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Exercice 5 Après avoir donné le domaine sur lequel on peut les dériver, donner la dérivée des fonctions dont l'expression est $f(x) =$:

1. $\frac{\arctan(x)}{x+1}$,
2. $\frac{1}{(x+1)^2}$,
3. $\sqrt{\cos(x)}$,
4. $\sin(x) \times \ln(\cos(x) + 1)$,
5. $\ln(|x|)$.

Exercice 6 On souhaite étudier la fonction $x \mapsto f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

1. Quelle est son domaine de définition ?
2. Est-elle continue ? Dérivable ? Préciser les intervalles.
3. Montrer que $f'(x) = 0$.
4. Que peut-on déduire ?

Exercice 7 Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 8 Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, on définit une fonction f_λ sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes représentatives des fonctions f_λ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 sont concourantes.

Exercice 9

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\arctan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \arctan(1+x) - \arctan(x).$$
2. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right).$$
3. Quelle est la limite de la somme lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 10 Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\sin(x)} + x.$$

Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle a déterminer, puis que f^{-1} est dérivable sur un certain intervalle aussi à déterminer.

3. THÉORÈME DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 11 Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}, |\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x-y|.$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+, \sin(x) \leqslant x$.

Exercice 12 Soit P un polynôme à racine simple (autrement dit : P est de degré $n \in \mathbf{N}^*$ et il admet n racines réelles distinctes). Montrer que P′ est scindé à racines simple.

Exercice 13 En appliquant le théorème des accroissements finis à une bonne fonction, déterminer

$$\lim_{x \to +\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}.$$

Exercice 14 **[Étude de fonctions et suites]**

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Justifier que f est de classe C^1 et dresser le tableau de variations de f.
3. Justifier que f a un unique point fixe (autrement dit : l'équation $f(x) = x$ a une unique solution $\ell \in \mathbf{R}$. On vérifiera que $\ell \in \mathbf{R}_+$.
4. Justifier que $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$.
5. Montrer que
$$\forall x \geqslant 0, |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$
6. Montrer que $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par f.

On définit désormais la suite (u_n) par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n).$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
8. A l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.
9. Que conclure ?

4. ÉTUDES DE FONCTIONS

Exercice 15 Étudier les variations de la fonction réelle définie par

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{x}{e^x + 1}.$$

Exercice 16 Soit

$$f : x \in \mathbf{R} \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Prouver que f est classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et déterminer f',
2. Dresser le tableau de variations de f,
3. Représenter la courbe de f dans un repère orthonormé (en accordant du soin aux tangentes remarquables).

Exercice 17 **[Obtention d'inégalités classiques]**

1. En étudiant $f : x \mapsto e^x - 1 - x$, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geqslant 1 + x.$$

2. De même, montrer que pour tout

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leqslant x.$$

5. PROBLÈME - FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES RÉCIPROQUES

Dans ce problème, on étudie les réciproque sur des intervalles à déterminer des fonctions cos et sin. Si elles ne sont pas explicitement au programme (et donc pas dans le cours), elles apparaissent parfois indirectement dans des problèmes de concours (notamment en probabilité). C'est aussi l'occasion de faire un problème bilan sur l'étude de fonctions.

1. Montrer que la fonction cos réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle à déterminer. On appelle sa réciproque arccos (pour arc cosinus).
2. Quelles sont les variations de arccos ?
3. Montrer que la fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle à déterminer. On appelle sa réciproque arcsin (pour arc sinus).
4. Quelles sont les variations de arcsin ?
5. Sur quels intervalles sont dérivables les fonctions arccos et arcsin ? Donner l'expression de leurs dérivées.
6. Représenter les courbes des fonctions arccos et arcsin en faisant attention aux tangentes.
7. Calculer $\arccos' + \arcsin'$. Que peut-on en déduire ?