

TD 2 - Raisonnements. Éléments de logique.

1. PROPOSITIONS LOGIQUES

Exercice 1 Écrire les affirmations suivantes avec des quantificateurs

1. Tout réel x admet un réel qui lui est au moins trois fois plus grand,
2. Il existe un unique entier relatif qui est strictement plus petit que tous les autres nombres relatifs,
3. E est une partie bornée de $\mathbf{N}$,
4. Quelque soit le réel y , l'équation $e^x = y + 1$ d'inconnue x admet une unique solution.

Exercice 2 Traduire en français les affirmations suivantes.

1. $\exists! x \in \mathbf{R}, f(x) = 0$,
2. $\forall A > 0, \exists! n \in \mathbf{N}, n \leq A < n + 1$,
3. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
4. $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x) = f(y) \Rightarrow \exists z \in [x, y], f'(z) = 0$,

2. CONTRAPOSITION, ABSURDE

Exercice 3 Par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas de plus petit nombre réel strictement positif.

Exercice 4 Montrer les propositions suivantes par contraposée :

1. Si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ est irrationnel.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n^2 - 1$ est divisible par 8, alors n est impair.

3. DÉMONSTRATION PAR RÉCURRENCE

Exercice 5 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 6 Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(\sum_{k=0}^n k \right)^2 = \sum_{k=0}^n k^3.$$

Exercice 7 On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n).$$

Exercice 8 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7 quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Déterminer u_n en fonction de n .

4. MANIPULATION DES QUANTIFICATEURS

Exercice 11 Montrer les propositions suivantes :

1. $\forall x > 0, \exists \epsilon > 0, 0 < \epsilon < x$,
2. $\forall A > 0, \exists ! n \in \mathbb{N}, n \leq A < n + 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, x = \ln(z^2)$.

Exercice 12 Montrer que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}_+, y^2 - \sqrt{x} = 0.$$

Exercice 13 On souhaite déterminer toutes les fonctions réelles dérivables vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On raisonne par analyse-synthèse. Soit f une telle fonction.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que f' est constante.
3. En déduire que f est linéaire.
4. Synthèse : conclure !

Exercice 14

1. Soit a un réel positif. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n\theta)| \leq n|\theta|$.
On admettra que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|\sin(\theta)| \leq |\theta|$.

Exercice 15 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur I à valeurs réelles. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. la fonction f s'annule
2. la fonction f est la fonction nulle
3. f n'est pas une fonction constante
4. f ne prend jamais deux fois la même valeur
5. la fonction f présente un minimum
6. f prend des valeurs arbitrairement grandes
7. f ne peut s'annuler qu'une seule fois.

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Écrire les négations des phrases quantifiées suivantes :

1. $\exists M \in \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$.
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
4. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$