

TD 21 - Compléments sur la dérivation

1. DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Exercice 1 Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = \ln(1+x), \quad g(x) = e^{2x+1}, \quad h(x) = \sqrt{x}.$$

On donnera l'ensemble lequel les fonctions sont de classe C^∞ .

Exercice 2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

En déduire pour tout $(a, \phi) \in \mathbb{R}^2$ les dérivées n -ièmes des fonctions $f : x \mapsto \cos(ax + \phi)$.

Exercice 3 Déterminer les dérivées successives des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 \cos(x), \quad g(x) = (x+1)^2 \ln(x), \quad h(x) = (x-1)^2 x^n.$$

Exercice 4 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ des réels distincts. Déterminer la dérivée n -ième de

$$f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$$

et en déduire une formule pour

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 5 Soit f n fois dérivable sur $[a, b]$ telle que

$$f(a) = 0 \text{ et } \forall k \in \{0, n-1\}, f^{(k)}(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$. On utilisera le théorème de Rolle successivement sur les dérivées de f , et on fera un dessin.

Exercice 6 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur \mathbf{R} .
2. Justifier que f est de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

4. Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbf{R} .

2. FORMULES DE TAYLOR

Exercice 7 Montrer que la série $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et déterminer sa somme. On appliquera la formule de Taylor à la fonction $f : x \rightarrow \ln(1+x)$ après avoir déterminé ses dérivées successives.

Exercice 8 Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 9 Donner une approximation de e à 10^{-2} près. On utilisera l'inégalité de Taylor pour la fonction \exp .

Exercice 10 Soit f une fonction C^2 sur \mathbf{R} et $x \in \mathbf{R}$. Calculer la limite lorsque h tend vers 0 de

$$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Exercice 11 Montrer que, pour tout réel x

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}.$$

En déduire la limite de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$$

Exercice 12 Déterminer toutes les fonctions f n fois dérivables telles que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Exercice 13 A l'aide d'une formule de Taylor, déterminer la limite en 0 de

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 14 Soit $x \in \mathbf{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$. On utilisera la formule de Taylor pour la fonction cosinus entre 0 et x .