TD 23 - Développements limités

Exercice 1 Calculer les développements limites de f en 0 dans chacun des cas suivants.

1. $f(x) = \cos(2x)\sin(x)$ à l'ordre 2
2. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2
3. $f(x) = (x^2+1)(e^x-1)$ à l'ordre 4
4. $f(x) = \cos(x)^2$ à l'ordre 4
5. $f(x) = \sin(x)e^x$ à l'ordre 3
6. $f(x) = \ln(1+x)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 2.
7. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre 4.

Exercice 2 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{x(\sqrt{1+x}-1)}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin(x)}}{x^3}$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$
7. $\lim_{x\to +\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)$
8. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 3 **Retour sur le prolongement continu et C^1.**

On souhaite étudier la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et qu'on a

$$\forall x \in]0,1[, f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\ln(x)^2}\left(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\right).$$

3. Montrer que f se prolonge en une fonction C^1 sur $[0,1[$.

Exercice 4 Soient $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \ln(1+\frac{1}{n^\alpha}) - \ln(1+\frac{1}{n^\beta})$
2. $v_n = \ln(1+\frac{1}{n^\alpha}) + \ln(1-\frac{1}{n^\beta})$
3. $w_n = \ln(1+\frac{1}{n^\alpha}) - \ln(1-\frac{1}{n^\beta})$.

Exercice 5 **Retour sur le prolongement continu et C^1 - 2.**

On souhaite étudier la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{e^x-1} \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$. Déterminer sa dérivée f'.
3. Montrer que $f\in\mathrm{C}^1(\mathbf{R})$.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=e^{-2x}\ln(1+x)$. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire la tangente à la courbe représentative de f et donner les positions relatives.

Exercice 7 Montrer que les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent des asymptotes obliques et donner leurs équations.

1. $x\mapsto(2x-1)e^{\frac{-3}{x}}$,
2. $x\mapsto(x^2+1)\ln(1-\frac{3}{x})$,
3. $x\mapsto\sqrt{x^2+4x+5}-x^2e^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 8 On définit la suite de fonctions f_n par

$$\forall x\in]0,+\infty[, f_n(x)=xe^{-\frac{n}{x}}.$$

1. Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction prolongée est dérivable (à droite) en 0. Donner $f'(0)$.
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$,

$$f_n(x)=x-n+\frac{n^2}{x}+o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. En déduire que la courbe représentative de f_n admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner son équation.
5. Déterminer la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote.
6. Représenter l'allure de la courbe et de l'asymptote.

Exercice 9 Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer la position relative de la courbe et de cette asymptote.

Exercice 10 Soit f une fonction paire (resp. impaire). Montrer que si f admet un DL en x_0 alors la partie régulière (polynomiale) de celui-ci est paire (respectivement impaire).