

TD 26 - Intégrales généralisées

1. INTÉGRALES CONVERGENTES

Exercice 1 Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

- $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+x} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x\sqrt{x+1}} dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(t) dt$
- $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$
- $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u-1}} du$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(u)}{\sqrt{u-1}^3} du$
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(x)}{\sqrt{\tan(x)}} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u(1+u)}} du$
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sin(x)} dx$

Exercice 2 Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

- $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^\alpha x^\beta} dx,$
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} dx,$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha x^\beta} dx$
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha x^\beta} dx$

5. $\int_0^\infty \frac{\sin^\alpha(x)}{x^\beta} dx.$

2. CALCUL D'INTÉGRALES

Exercice 3 On définit l'intégrale $K_n (n \in \mathbb{N}^*)$ par

$$K_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Après avoir démontré la convergence des intégrales, établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2nK_{n+1} = (2n-1)K_n$. En déduire une formule pour K_n .

Exercice 4 Dans cet exercice, on souhaite calculer les intégrales

$$I(n, \alpha) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

- Justifier la convergence de ces intégrales pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$.

1. Pour tout $\alpha > 0$, calculer $I(0, \alpha)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I(n+1, 1) = (n+1)I(n, 1)$.
3. En déduire une formule pour $I(n, 1)$.
4. En réalisant un changement de variable, trouver une formule pour $I(n, \alpha)$.

Exercice 5 On définit la suite d'intégrale suivante pour n, p des entiers naturels.

$$I_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln(x)^p dx.$$

1. Montrer que toutes ces intégrales sont convergentes.
2. Déterminer, en fonction de la parité de n et p , le signe de l'intégrale.
3. Montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$I_{n,p+1} = -\frac{p+1}{n+1} I_{n,p}.$$

4. En déduire une formule générale pour $I_{n,p}$.

3. EXERCICES AVANCÉS

Exercice 6 Dans cet exercice on étudie l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt.$$

1. Justifier que l'intégrale est convergente.
2. Pour ne peut-on pas la calculer en écrivant

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt?$$

3. Calculer l'intégrale. On commencera par réaliser une intégration par partie avec $u(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ et $v'(t) = \frac{1}{t}$.

Exercice 7 Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

est convergente. On réalisera le changement de variable $u = x^2$, puis on réalisera une intégration par parties.

Exercice 8 Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^n)} \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n dt}{(1+t^2)(1+t^n)}.$$

1. Justifier que les intégrales convergent.
2. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, exprimer I_n en fonction de J_n .
3. Calculer $I_n + J_n$.
4. En déduire I_n et J_n .

Exercice 9 [D'après EDHEC 2025]

1. Soit x et y deux réels.

a) Déterminer un équivalent simple de $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ au voisinage de 0.

b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

c) Montrer, à l'aide du changement de variable $s = 1 - t$, que les intégrales

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$$

sont de même nature.

d) En déduire que

$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$. On note désormais, pour tout couple (x, y) de réels strictement positifs, $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

e) Montrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = B(y, x).$$

2. Soit $x > 0$, calculer $B(x, 1)$.

3. a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y).$$

b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad x B(x, y+1) = y B(x+1, y).$$

c) En déduire que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

4. Montrer que :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$