

# TD 27 - Couples de variables aléatoires

**Exercice 1** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbf{N}$  telles que

$$\forall (i, j) \in \mathbf{N}^2, P((X, Y) = (i, j)) = \frac{a}{2^{i+j}!}$$

pour un certain réel  $a \in \mathbf{R}$ .

1. Déterminer  $a$ .
2. Déterminer les lois marginales du couple.
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 2** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire successivement et sans remise deux boules. On note  $X_1$  et  $X_2$  respectivement les numéros sur les boules tirées en premier et en deuxième.

1. Déterminer la loi de  $X_1$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$ .
3. Quelle est la loi de  $T_2$ ?
4.  $T_1$  et  $T_2$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 3** Soient  $X$  et  $Y$  deux v.a. telles que le couple  $(X, Y)$  suit une loi uniforme sur  $[[0, n]]^2$ .

1. Traduire l'énoncé avec des quantificateurs.
2. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$ .
3. Déterminer la loi de  $X + Y$ .
4.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 4** On dispose de deux dés à  $n$  faces qu'on lance simultanément. On note  $X$  et  $Y$  les résultats respectifs des deux dés.

1. Déterminer la loi de  $Z = \min(X, Y)$ ,
2. Déterminer la loi de  $T = \max(X, Y)$ ,
3. Déterminer la loi de  $S = X + Y$ .

**Exercice 5** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . Déterminer la probabilité que la matrice

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$$

soit inversible.

**Exercice 6** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que  $X \hookrightarrow B(p)$  et  $Y \hookrightarrow G(q)$  pour des réels  $p, q \in ]0, 1[$ .

1. Déterminer la loi de  $XY$ .
2. Que vaut  $E(XY)$ ?

**Exercice 7** Soient  $p$  et  $q$  deux réels de  $]0, 1[$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires, suivant respectivement une loi binomiale  $B(2, p)$  et géométrique  $G(q)$ . Montrer que  $Z = Y^X$  admet une espérance, et déterminer sa valeur.

**Exercice 8** On réalise une succession infinie de pile ou face d'une pièce qui a une probabilité  $p$  de tomber sur pile. On note  $X$  le rang d'apparition du premier pile et  $Y$  le rang d'apparition du deuxième.

1. Quelle est la loi de  $X$ ?
2. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ .
3. Déterminer la loi de  $Y$ .
4.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 9** Soit  $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$  une suite de v.a. indépendantes suivant la loi de Bernoulli  $B(p)$ . On pose pour tout  $i \in \mathbf{N}$ ,  $Y_i =$

$X_i X_{i+1}$ .

1. Déterminer  $E(S_n)$ .
2. Déterminer la loi de  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

**Exercice 10** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On note  $Z = \min(X, Y)$ .

1. Déterminer, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $P(X \geq n)$ .
2. Calculer, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $P(Z \geq n)$ .
3. En déduire la valeur de  $P(Z = n)$ .
4. Montrer que  $Z$  suit une loi géométrique de paramètre à déterminer.
5.  $X$  et  $Z$  sont-elles indépendantes?

**Exercice 11** Un géologue creuse et chercher des pierres précieuses.. Le nombre pierres qu'il trouve en une heure est une variable aléatoire  $N$  qui suit une loi  $P(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . Chacune de ces pierres a une probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'être précieuse et donc  $1 - p$  d'être banale. On note  $X$  le nombre de pierres précieuses obtenues et  $Y$  le nombre de pierres banales.

1. Déterminer, pour tout  $(i, j) \in \mathbf{N}^2$ , la probabilité conditionnelle  $P_{[N=i]}(X = j)$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(N, X)$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ .

4. Déterminer la loi de  $Y$ .
5. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.