

# TD 5 - Fonctions usuelles, généralités sur les fonctions

1.

## GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

**Exercice 1** Soit  $f : x \mapsto x + 1$ ,  $g : x \mapsto \ln(x)$  et  $h : x \mapsto \sqrt{x}$ . Donner les domaines de définitions et les expressions de  $h \circ f$ ,  $h \circ g$ ,  $f \circ h$ ,  $f \circ g$ ,  $g \circ h$ ,  $g \circ f$ .

**Exercice 2** Donner les domaines de définitions des fonctions  $f \circ g$  et  $g \circ f$  dans les cas suivants :

1.  $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$
2.  $f(x) = e^{x^3}$ ,  $g(x) = \ln(x)$ ,
3.  $f(x) = 3^x$  et  $g(x) = \ln(2x - 10)$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  une fonction dérivable paire. Montrer que  $f'$  impaire. Que dire si  $f$  est impaire?

**Exercice 4** Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires?

1.  $f : x \mapsto \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}$
2.  $g : x \mapsto \sin(x + x^3 + x^5)$ ,

3.  $h : x \mapsto e^{x^2 \cos(x)}$ .

**Exercice 5** Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques. On essaiera de trouver des périodes les plus petites possibles).

1.  $f : x \mapsto \cos(2x) + \sin(4x)$ ,
2.  $\lfloor 2x \rfloor - 2x$
3.  $\tan(\frac{x}{2}) + \tan(\frac{x}{8})$ ,
4.  $\cos(2\pi \lfloor x \rfloor)$ .

2.

## FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

**Exercice 6** Résoudre les équations suivantes :

1.  $e^x + e^{-x} = 5$ ,
2.  $\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 2 = 0$ ,
3.  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,
4.  $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$ ,
5.  $x = \sqrt{x} - 2$ .
6.  $\cos(x)^2 - \sin(x)^2 = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 7** En utilisant les symétries et les formules de duplications, calculer  $\cos(\frac{9\pi}{8})$  et  $\sin(\frac{9\pi}{8})$ .

**Exercice 8** Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos(3x) + 3\cos(x) = 4\cos^3(x).$$

**Exercice 9** Résoudre les équations :

1.  $\tan(2x) = 1$ ,
2.  $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = \tan(-x)$ ,
3.  $\tan(x + 2) = 12$ .

**Exercice 10** Montrer que, pour tout  $x, y$  tels les nombres sont bien définis :

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}.$$

**Exercice 11** Soit  $f$  la fonction définie par

$$x \in \mathbb{R}^* \mapsto \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

En dérivant  $f$ , déduire les valeurs prises par  $f$ .

**Exercice 12**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , simplifier

$$\cos(\text{Arctan}(x)), \sin(\text{Arctan}(x)), \tan(\text{Arctan}(x)).$$

2. Pour tout  $x \in D_{\tan}$ , justifier qu'il existe un entier  $k$  tel que

$$\text{Arctan}(\tan(x)) = x + k\pi.$$

3. (\* Question plus difficile dont on pourra admettre la réponse.) Montrer que

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)\right).$$

On pourra utiliser la formule de l'exercice 10.

4. Justifier que

$$-\frac{\pi}{2} < 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right) < \pi.$$

5. Montrer la **Formule de Machin** :

$$\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right).$$