

# TD 9 - Continuité des fonctions

## 1. ASPECT LOCAL, PROLONGEMENT CONTINU

**Exercice 1** Étudier la continuité de la fonction définie sur  $\mathbf{R}$  par  $f(0) = 1$  et  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  si  $x \neq 0$ .

**Exercice 2** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}_+$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = x \ln(x)$  sinon. Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbf{R}_+^*$  par  $f(x) = e^{2x}$ . Quelle valeur doit-on donner à  $f(0)$  pour prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $\mathbf{R}_+$  ?

**Exercice 4** Étudier la continuité de la fonction définie sur  $\mathbf{R}$   $f$  lorsqu'elle est définie par

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

**Exercice 5** Étudier la continuité de la fonction  $f : x \in \mathbf{R} \mapsto x - [x]$ .

**Exercice 6** Soit  $f$  la fonction réelle définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \lfloor \frac{1}{x} \rfloor & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de  $f$ .

**Exercice 7** Soit  $f$  la fonction sur  $[-1, 0[ \cup ]0, +\infty$  définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}.$$

Montrer que l'on peut prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $[-1, +\infty[$ .

## 2. CALCUL DE LIMITES

**Exercice 8** Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 + \frac{1}{x^5}$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^5 (1 + x^2)$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) \left(\frac{1}{x}\right)$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{1}{x^5}\right)$ ,
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} - 5 - \frac{1}{x}$ .

**Exercice 9** Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1 + \sqrt{x}}$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} + 1}{e^{1/x} - 1}$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ ,
6.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^{-2} + x^{-3}}{x^{-3} - x^{-4}}$ .

**Exercice 10** Calculer les limites suivantes (si elles existent).

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{e^x + x^2}$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}}$ ,
3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x - 4}\right)^2$ ,
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^5)^2}{(5^x)}$ ,
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2}{2^x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - \ln(x)}{e^x - x}$ .

## 3. AUTRES EXERCICES

**Exercice 11** Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  croissante et périodique. Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 12** Soit  $f$  une fonction périodique qui admet une limite finie en  $+\infty$ . Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 13** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  définie par  $f(x) = \sup\{\frac{x^n}{n!}, n \in \mathbb{N}\}$ .

1. Vérifier que  $f$  est bien définie.
2. Montrer que  $f$  est croissante.
3. Montrer que  $f$  est continue.

**Exercice 14** Soit  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f$  est croissante et  $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$  est décroissante. Montrer que  $f$  est continue.

*Indication : pour  $x$  fixé, on étudiera les limites à gauche et à droite de  $f$  en  $x$ .*