

DEVOIR MAISON # 10

Date : 20 avril 2026

A. EXERCICES

Exercice 1 Justifier que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{2^{2n+1}}$$

Exercice 2 Déterminer la nature de la série suivante en fonction de $\alpha > 0$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $E = \mathbf{R}_n[X]$. On définit

$$F = \{P \in E, P(1) = P(0).\}$$

Déterminer une base de F et justifier que $\dim(F) = n$. Montrer que $E = F \oplus \text{Vect}(x)$.

B. LA FORMULE DE STIRLING

Les intégrales de Wallis ont été traitées plusieurs fois, si vous considérez que c'est acquis vous pouvez sauter la partie B.1. et admettre les résultats pour la partie B.2.

B.1. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n \geq 0}$.
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

4. Dédire des questions précédentes que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

B.2. Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0.
b) En déduire que : $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.
3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ .
4. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ .
5. Démontrer alors la formule de Stirling :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

C. SYMÉTRIES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = I_n$. Soit $E = M_{n,1}(\mathbf{R})$, on définit

$$F = \{X \in E, MX = X\} \text{ et } F' = \{X \in E, MX = -X\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de M . On admet que F' en est un.
2. Montrer que $F \cap F' = \{0_E\}$.
3. Soit $X \in E$, montrer que

$$X + MX \in F \text{ et } X - MX \in F'$$

4. En déduire que $E = F \oplus F'$.

D. CARRÉS MAGIQUES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^n M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur ligne } i)$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_j(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,j} \text{ (la somme des coefficients de la matrice sur colonne } j).$$

On note aussi

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^n M_{i,i} \text{ et } d_2(M) = \sum_{i=1}^n M_{n+1-i,i}$$

les sommes sur les diagonales.

On dit qu'une matrice est un carré magique si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $\ell_i(M) = c_j(M) =$

$d_1(M) = d_2(M)$. On note alors $s(M)$ la valeur commune et on dit que M est un carré magique de somme $s(M)$. On note E_n l'ensemble des carrés magiques et K_n l'ensemble des carrés magiques de somme nulle. On note J_n la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ avec 1 pour chaque coefficient.

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel. On admet que K_n en est un.
2. Montrer que $E_2 = \text{Vect}(J_2)$ et $K_2 = \{0_2\}$.
3. Soit $M \in E_n$. Montrer que $M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n$. En déduire que $E_n = K_n + \text{Vect}(J_n)$.
4. Montrer que $E_n = K_n \oplus \text{Vect}(J_n)$.
5. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe de matrices (M_1, M_2) où
 - M_1 est antisymétrique
 - M_2 est symétrique
 - $M = M_1 + M_2$.
 - Indication : on obtiendra

$$M_1 = \frac{M - {}^t M}{2} \text{ et } M_2 = \frac{M + {}^t M}{2}$$

Dans la suite de l'exercice, on traite le cas $n = 3$.

6. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in K_3$. Montrer que $M_1 \in K_3$ et $M_2 \in K_3$. Montrer que $M_1 \in \text{Vect}(A)$ et $M_2 \in \text{Vect}(B)$.

7. En déduire une base de K_3 puis montrer que (J_3, A, B) est une base de E_3 .

E. ÉTUDES DE QUELQUES SÉRIES

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
 b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.
 c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n .
 d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
2. Informatique.
 - a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.
 def rang(a) :

```

k = 1
s = 1
while s < a :

    return k = k + 1
    s = s + 1/k

```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

b) L'appel

`np. exp (49)`

renvoie : $1.9073465724950998e + 21$.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

c) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.