DEVOIR MAISON # 10

Date : 20 avril 2026

A. EXERCICES

Exercice 1 Justifier que la série suivante est convergente et calculer sa somme

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{2^{2n+1}}$$

Solution

On réécrit la somme

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-3)^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 0}(-\frac{3}{4})^n.$$

On reconnait une série géométrique de raison $-\frac{3}{4} \in]-1,1[$. Elle converge donc vers $\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\frac{4}{7} = \frac{2}{7}$.

Exercice 2 Déterminer la nature de la série suivante en fonction de $\alpha > 0$.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$$

Solution

Les quantités dans les cos et sin tendent vers zéro. On a donc l'équivalent

$$u_n \sim \frac{n^\alpha}{2n^{2\alpha}} = \frac{1}{2n^\alpha}.$$

Par équivalence à une série de Riemann, la série converge si et seulement si $\alpha > 1$. (par le théorème d'équivalence pour les SATP).

Exercice 3 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathrm{E} = \mathbf{R}_n[X]$. On définit

$$F = \{P \in E, P(1) = P(0).\}$$

Déterminer une base de F et justifier que $\dim(F) = n$. Montrer que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$.

Solution

$$F = \{P \in E, P(1) = P(0).\}$$

Soit $= \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \in E$. On a

$$\begin{aligned} P \in E \iff & P(1) = P(0) \\ & = \sum_{i=0}^{n} p_i = p_0 \\ & = \sum_{i=1}^{n} p_i = 0 \end{aligned}$$

Il y a une unique équation donc on va pouvoir poser n paramètres $p_0, \dots p_1, \dots, p_{n-1}$. Ainsi

$$\begin{aligned} P \in E & \iff p_n = -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \\ & \iff P = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots p_{n-1} x^{n-1} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} p_i\right) x^n \\ & \iff P = p_0 + \sum_{i=1}^{n-1} p_i \left(x^i - x^n\right) \\ & \iff P \in \mathrm{Vect}\left(1, x - x^n, x^2 - x^n, \dots, x^{n-1} - x_n\right) \end{aligned}$$

Remarque : la famille étant libre car échelonnée en degré, on peut prouver d'une autre façon la dimension de F ici.
Pour montrer que $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$. On montre que

- $\dim E = n + 1 = \dim F + \dim \mathrm{Vect}(x)$.
- $F \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0_E\}$: soit $P \in F \cap \mathrm{Vect}(x)$, on a $P \in \mathrm{Vect}(x)$ donc $P = \lambda x$ pour un certain réel λ. Comme $P \in F$, $P(0) = P(1)$ donc $0 = \lambda$ donc $P = 0_E$. On a donc l'inclusion $F \cap \mathrm{Vect}(x) \subset \{0_E\}$ et donc l'égalité car l'inclusion réciproque est toujours vraie.

Ainsi $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$.

Solution

B. LA FORMULE DE STIRLING

Les intégrales de Wallis ont été traitées plusieurs fois, si vous considérez que c'est acquis vous pouvez sauter la partie B.1. et admettre les résultats pour la partie B.2.

B.1. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose :
$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n,$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

4. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

B.2. Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0

Solution

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$.

.

b) En déduire que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.

Solution

Comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, le DL précédent donne

$$\begin{aligned}\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3}\right) + o(\frac{1}{n^3})\\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^2})\end{aligned}$$

d'où l'équivalent.

.

3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln u_{n+1} - \ln u_n)$

Solution

La série de terme général $\frac{1}{12n^2}$ converge car c'est une série de Riemann pour $\alpha > 1$. Donc par critère d'équivalence pour les SATP, la série de terme général $(-\ln u_{n+1} + \ln u_n)$ converge, donc son opposée aussi.

.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ.

Solution

Par télescopage de la série précédente, on obtient que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une limite ℓ', donc u_n aussi vers une limite $\ell = \exp(\ell')$.

4. À l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ.

Solution

$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ alors $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}$ Or d'après la partie I, $W_{2n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. Donc $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\ell\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{e^{2n}}}{2^{2n}\ell^2\frac{n^{2n+1}}{e^{2n}}}$ ou encore $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\ell\sqrt{n}}$. Or, $W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$, donc $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\ell} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Ainsi $\ell = \sqrt{2\pi}$.

5. Démontrer alors la formule de Stirling.

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Solution

Facile à partir de la question précédente.

C. SYMÉTRIES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = I_n$. Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on définit

$$F = \{X \in E, MX = X\} \text{ et } F' = \{X \in E, MX = -X\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$. On admet que F′ en est un.

Solution

On a
- Par définition $F \subset E$,
- F est non vide car $0_E \in F$. En effet $M0_E = 0_E$.
- Soient $X, X' \in F^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} M(X+\lambda X') &= MX + \lambda MX' \\ &= X + \lambda X' \end{aligned}$$

donc $X + \lambda X' \in F$.
On vient donc de prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que $F \cap F' = \{0_E\}$.

Solution

Soit $X \in F \cap F'$, on a $MX = X$ et $MX = -X$ donc $X = -X$ donc $X = 0_E$. $F \cap F' \subset \{0_E\}$.
Comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on a égalité.

3. Soit $X \in E$, montrer que

$$X + MX \in F \text{ et } X - MX \in F'$$

Solution

Soit $X \in E$, on a

$$M(MX+X) = M^2X + MX = X + MX$$

donc $X + MX \in F$. De même pour $MX - X \in F'$.

4. En déduire que $E = F \oplus F'$.

Solution

Soit $X \in E$, on a

$$X = \frac{1}{2}(X+MX) + \frac{1}{2}(X-MX)$$

avec $\frac{1}{2}(X+MX) \in F$ et $\frac{1}{2}(X-MX) \in F'$ donc on a $X \in F+F'$ et donc $E \subset F+F'$ donc $E = F+F'$ car l'inclusion réciproque est toujours vraie. Ainsi $E = F+F'$. Comme $F \cap F' = \{0_E\}$, on déduit que $E = F \oplus F'$.

D. CARRÉS MAGIQUES

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note pour tout $i \in \{1, \dots n\}$,

$$\ell_i(M) = \sum_{j=1}^{n} M_{i,j} (\text{ la somme des coefficients de la matrice sur ligne i})$$

et pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_j(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,j} (\text{ la somme des coefficients de la matrice sur colonne j}).$$

On note aussi

$$d_1(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ et } d_2(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{n+1-i,i}$$

les sommes sur les diagonales.

On dit qu'une matrice est un carré magique si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ell_i(M) = c_j(M) = d_1(M) = d_2(M)$. On note alors $s(M)$ la valeur commune et on dit que M est un carré magique de somme $s(M)$. On note E_n l'ensemble des carrés magique et K_n l'ensemble des carrés magiques de somme nulle. On note J_n la matrice de $M_n(\mathbf{R})$ avec 1 pour chaque coefficient.

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel. On admet que K_n en est un.

Solution

On prouve que c'est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.
- Par définition : $E_n \subset M_n(\mathbf{R})$.
- E_n est non vide car 0_n est bien un carré magique, de somme nulle.
- Soient A, B dans E_n et $\lambda \in \mathbf{R}$. Sur toutes les lignes, colonnes, ou diagonales, la somme es coefficients de $A+\lambda B$ est $s(A)+\lambda s(B)$ donc $A+\lambda B$ est bien un carré magique.
  Ainsi E_n est bien sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.

2. Montrer que $E_2 = \mathrm{Vect}(J_2)$ et $K_2 = \{0_2\}$.

Solution

- E_2 : $J_2 \in E_2$ donc $\mathrm{Vect}(J_2) \subset E_2$ car c'est un espace vectoriel. Pour la réciproque, soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_2$. On a $a+b = a+d$ donc $b = d$. De plus $b+d = c+d$ donc $b = c$. De plus $a+b = c+d$ donc $a = b = c = d$. Donc $M \in \mathrm{Vect}(J_2)$. Ainsi on a l'égalité.
- Soit $M \in K_2, M = \lambda J_2$ car $M \in E_2$. Or $s(M) = 0$ donc $2\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $M = 0_2$. D'où $K_2 \subset \{O_2\}$ et donc l'égalité car l'inclusion réciproque est évidente.

3. Soit $M \in E_n$. Montrer que $M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n$. En déduire que $E_n = K_n + \mathrm{Vect}(J_n)$.

Solution

Soit $M \in E_n$. Par linéarité de la somme, sur n'importe quelle ligne, colonne, ou diagonale, on obtient $s\left(M - \frac{s(M)}{n} J_n\right) = s(M) - s(M)s(J_n)/n = s(M) - s(M)n/n = 0$ donc $M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n$. En décrivant

$$M = M - \frac{s(M)}{n} J_n + \frac{s(M)}{n} J_n$$

avec

$$M - \frac{s(M)}{n} J_n \in K_n \text{ et } \frac{s(M)}{n} J_n \in \mathrm{Vect}(K_n)$$

on prouve que $M \in K_n + \mathrm{Vect}(J_n)$. C'est vrai pour toute matrice $M_i n E_n$ d'où la somme d'espaces vectoriels demandée.

4. Montrer que $E_n = K_n \oplus \mathrm{Vect}(J_n)$.

Solution

D'après la somme précédente, il suffit de montrer que $K_n \cap \text{Vect}(J_n) = \{0_n\}$. Démontrons le : soit $M \in K_n \cap \text{Vect}(J_n)$, M s'écrit λJ_n pour un certain $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc $s(M) = n\lambda$ or $s(M) = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $M = 0_n$. On a donc une inclusion, l'autre étant triviale, on bien l'égalité. Des deux dernières questions on déduit que $E_n = K_n \oplus \text{Vect}(J_n)$.

5. Soit $M \in M_n(R)$, montrer qu'il existe de matrices (M_1, M_2) où

- M_1 est antisymétrique
- M_2 est symétrique
- $M = M_1 + M_2$.
- Indication : on obtiendra

$$M_1 = \frac{M - {}^tM}{2} \text{ et } M_2 = \frac{M + {}^tM}{2}$$

Solution

Il suffit de vérifier que les trois points demandés.

Dans la suite de l'exercice, on traite le cas $n = 3$.

6. On définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in K_3$. Montrer que $M_1 \in K_3$ et $M_2 \in K_3$. Montrer que $M_1 \in \text{Vect}(A)$ et $M_2 \in \text{Vect}(B)$.

Solution

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soit $M \in K_3$ On la décompose sous la forme $M = M_1 + M_2 \in K_3$. Calculons par exemple $c_i(M_1)$:

$$\begin{aligned}
c_j(\mathrm{M}_1) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{M}+{}^t\mathrm{M}}{2}\right]_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{M}_{i,j}+\mathrm{M}_{j,i}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} + \frac{1}{2}\mathrm{M}_{j,i} \\
&= \frac{1}{2}c_j(\mathrm{M}) + \frac{1}{2}\ell_j(\mathrm{M}) \\
&= 0+0=0
\end{aligned}$$

On fait de même pour les lignes et les diagonales, que ce soit pour M_1 ou pour M_2. On obtient donc $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{K}_3$ et $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{K}_3$.
Montrons maintenant que $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$ (on admettra le résultat pour M_2 qui se fait de la même façon). M_1 est antisymétrique, donc sa diagonale est nulle. Notons ses coefficients $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Comme la somme sur les lignes doit faire zéro on obtient $b=-a$, $a=c$, $b=-c$ donc

$$\mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = a\,\mathrm{A}$$

Ainsi $\mathrm{M}_1 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$. De même on montre que $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{Vect}(\mathrm{B})$.

7. En déduire une base de K_3 puis montrer que $(\mathrm{J}_3, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ est une base de E_3.

Solution

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{K}_3$. Avec les notations précédentes $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ et d'après la question précédente il existe λ, μ des réels tels que $\mathrm{M}_1 = \lambda\mathrm{A}$ et $\mathrm{M}_2\lambda\,\mathrm{B}$. Ainsi (A, B) est génératrice de K_3. Comme c'est une famille échelonnée, elle est libre, c'est donc une base de K_3. Ensuite, par le théorème de la base adaptée, comme J_3 est une base de $\mathrm{Vect}(\mathrm{J}_3)$ et qu'on a la somme directe $\mathrm{E}_3 = \mathrm{K}_3 + \mathrm{J}_3$, $(\mathrm{J}_3, \mathrm{A}, \mathrm{B})$ est une base de E_3.

E. ÉTUDES DE QUELQUES SÉRIES

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0,1[$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $\mathrm{S}_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \mathrm{S}_n - \frac{1}{n}$.
c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , un encadrement de S_n.
d) Démontrer que $\mathrm{S}_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Informatique.
a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.
def rang(a) :

k = 1
s = 1
while s < a :

return k = k + 1
s = s + 1/k

Expliquer ce que produit l'appel rang(50).
b) L'appel
np. exp (49)
renvoie : 1.9073465724950998e + 21.
Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel rang(50).
3. a) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n t^{k-1}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t$.
c) Démontrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
d) En déduire que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Solution

1. a) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]\,0, +\infty\,[$ donc, pour tout $t \in [k, k+1]$ on a : $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ et en intégrant entre k et $k+1$ il vient par croissance de l'intégrale

$$\underbrace{\int_k^{k+1} f(k+1)\mathrm{d}t}_{=f(k+1)} \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_k^{k+1} f(k)\mathrm{d}t}_{=f(k)}$$

$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.
b) On somme membre à membre les inégalités obtenues à la question précédente de 1 à $n-1$ pour obtenir :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)}_{=\mathrm{S}_n - f(1)} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t}_{=\int_1^n f(t)\mathrm{d}t} \leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(k)}_{=\mathrm{S}_n - f(n)}$$

$S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}$.
c) Soit $n \geqslant 2$ entier. La première des inégalités de la question 7(a)ii donne : $S_n \leqslant \ln n + 1$. La seconde inégalité de la question 7(a)ii donne : $\ln n + \frac{1}{n} \leqslant S_n$.
On a : $\ln n + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln n + 1$.
d) D'après la question précédente, pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $1 + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{S_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln n}$.
Comme $1 + \frac{1}{n \ln n} \longrightarrow 0$ et $1 + \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 1$, on obtient par sandwich :

$$\frac{S_n}{\ln n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

ce qui démontre que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.
2. Informatique. a) Détaillons la fonction donnée.

```
def rang(a):
    k=1
        #Initialise un compteur
    s =1
    while s<a:
        k=k+1
        s =s + 1/k
        #Tant que la somme s est inférieure strictement à l'argument
        #de la fonction, on ajoute 1 au compteur k
        #et ajoute 1/k à la somme s.
    return k
        #Retourne le nombre de termes nécessaires pour que la somme s
        #soit supérieure à l'argument de la fonction
```

L'appel rang (50) fournira le plus petit entier naturel n pour lequel $S_n \geqslant 50$.
b) D'après le code proposé et la question 7(a)ii, pour $n = 1,910^{21}$, on a :

$$S_n \leqslant \ln n + 1 \leqslant 49 + 1 = 50$$

Le nombre de calculs nécessaires à l'exécution de l'appel rang(50) est supérieur à $1,910^{21}$, ce qui est très beaucoup.
3. a) On a (progression géométrique) : $\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}$.
b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors :

$$\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} \right) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt$$

Par linéarité de l'intégrale, il vient : $\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\, dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$, i.e. :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, \mathrm{d}t$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, \mathrm{d}t \right| = \int_0^x \underbrace{\frac{t^n}{1-t}}_{\leqslant \frac{x^n}{1-x}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

puisque $x \in [0,1[$. Par sandwich on obtient : $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, \mathrm{d}t = 0$.
d) D'après les questions 7(c)ii et 7(c)iii, pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\ln(1-x)$$

Ainsi la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.