

## Exercice 1

1. Soit  $W$  une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction  $G_W$ , définie sur  $[0, 1]$ , par

$$\forall t \in [0, 1], \quad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W = n)t^n.$$

- Justifier que  $G_W$  est bien définie sur  $[0, 1]$ .
- Montrer que  $G_W$  est croissante sur  $[0, 1]$ .
- En déduire l'existence d'un réel  $\ell$  tel que  $\lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = \ell$ .
- Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1[, \quad \sum_{n=0}^m \mathbf{P}(W = n)t^n \leq G_W(t) \leq G_W(1)$$

puis que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^m \mathbf{P}(W = n) \leq \ell \leq G_W(1)$$

- En déduire que  $G_W$  est continue en 1.
- Justifier que, pour tout  $t \in [0, 1[$ , la série  $\sum_{n \geq 1} n\mathbf{P}(W = n)t^{n-1}$  est convergente. On admet que  $G_W$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1[$  et que, pour tout  $t \in [0, 1[$  :

$$G'_W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(W = n)t^{n-1}$$

- Montrer que  $G_W$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0, 1]$  si et seulement si  $W$  admet un espérance, et que dans ce cas  $G'_W(1) = E(W)$ .
2. Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'évènements mutuellement indépendants.
- Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $1 - x \leq \exp(-x)$ .
  - Montrer que, pour tous entiers  $m, n$  vérifiant  $1 \leq n \leq m$ , on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \leq \sum_{k=n}^m \mathbf{P}(A_k).$$

- Montrer que, pour tous entiers  $m, n$  vérifiant  $1 \leq n \leq m$ , on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m \mathbf{P}(A_k)\right).$$

- On suppose que la série  $\sum_{n \geq 1} \mathbf{P}(A_n)$  diverge. Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1.$$

## Exercice 2

1. Soit  $x$  et  $y$  deux réels.
  - a) Déterminer un équivalent simple de  $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$  au voisinage de 0.
  - b) En déduire que l'intégrale  $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$ .
  - c) Montrer, à l'aide du changement de variable  $s = 1 - t$ , que les intégrales

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{1}{2}} s^{y-1}(1-s)^{x-1} ds$$

sont de même nature.

- d) En déduire que  $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$  converge si et seulement si  $x > 0$  et  $y > 0$ . On note désormais, pour tout couple  $(x, y)$  de réels strictement positifs,  $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$ .
- e) Montrer que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \quad B(x, y) = B(y, x).$$

2. Soit  $x > 0$ , calculer  $B(x, 1)$ .

3. a) Montrer que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y).$$

- b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \quad x B(x, y+1) = y B(x+1, y).$$

- c) En déduire que

$$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \quad B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

4. Montrer que :

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

**Exercice 3** Un géologue creuse et cherche des pierres précieuses.. Le nombre de pierres qu'il trouve en une heure est une variable aléatoire  $N$  qui suit une loi  $P(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . Chacune de ces pierres a une probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'être précieuse et donc  $1 - p$  d'être banale. On note  $X$  le nombre de pierres précieuses obtenues et  $Y$  le nombre de pierres banales.

1. Déterminer, pour tout  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ , la probabilité conditionnelle  $P_{[N=i]}(X = j)$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(N, X)$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ .

4. Déterminer la loi de  $Y$ .
5. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

### **Temporary page!**

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X now knows how many pages to expect for this document.