

DM # 2

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'inéquation

$$|x^2 - 5x + 6| \leq |5 - x|.$$

Corrigé

Il faut traiter différents cas en fonction des signes des expressions en jeu. $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ donc il faut traiter les cas dans les intervalles $] -\infty, 2],]2, 3],]3, 5],]5, +\infty[$.

- **cas 1** ($x \in] -\infty, 2]$). L'inéquation devient

$$x^2 - 5x + 6 \leq 5 - x \iff x^2 - 4x + 1 \leq 0.$$

C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 12$. Les racines sont $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$. Le coefficient dominant est positif donc le trinôme est négatif de ses racines. On garde comme premier ensemble

$$S_1 = [2 - \sqrt{3}, 2].$$

- **cas 2** ($x \in]2, 3]$). L'inéquation devient

$$-x^2 + 5x - 6 \leq 5 - x \iff -x^2 + 6x - 11 \leq 0.$$

C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 36 - 44 = -8$. Le trinôme est donc toujours du signe

de -1 donc toujours strictement négatif. On a pour ensemble solution $S_2 = [2, 3[$.

- **cas 3** ($x \in]3, 5]$). L'inéquation devient

$$x^2 - 5x + 6 \leq 5 - x \iff x^2 - 4x + 1 \leq 0.$$

On retrouve l'inéquation du cas 1, donc on garde comme ensemble solution $S_3 = [3, 2 + \sqrt{3}[$.

- **cas 4** ($x > 3$). L'inéquation devient

$$x^2 - 5x + 6 \leq x - 5 \iff x^2 - 6x + 11 \leq 0.$$

C'est un trinôme du second degré de discriminant $\Delta = 36 - 44 = -8$. Le trinôme est donc toujours du signe de 1 donc toujours strictement positif. On a pour ensemble solution $S_4 = \emptyset$.

L'ensemble des solutions est $S = [2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$.

Exercice 2 Simplifier

$$\prod_{i=1}^n \frac{2i+3}{2i-1}.$$

Corrigé

C'est un produit télescopique. Cela se voit en réalisant le changement de variable $i = i' - 2 \iff i' = i + 2$ dans le numérateur. On obtient

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^n \frac{2i+3}{2i-1} &= \frac{\prod_{i=1}^n 2i+3}{\prod_{i=1}^n 2i-1} \\ &= \frac{\prod_{i'=3}^{n+2} 2(i'-2)+3}{\prod_{i=1}^n 2i-1} \\ &= \frac{\prod_{i'=3}^{n+2} 2i'-1}{\prod_{i=1}^n 2i-1} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+3)}{1 \times 3} \frac{\prod_{i=3}^n 2i-1}{\prod_{i=3}^n 2i-1} \\ &= \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\prod_{i=1}^n \frac{2i+3}{2i-1} = \frac{(2n+1)(2n+3)}{3}.$

Exercice 3 Calculer

1. $\sum_{k=1}^n \sqrt{2}^{-3n+1}$
2. $\prod_{k=1}^n q^k (q \in \mathbb{R})$
3. $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

4. $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$

Corrigé

1. La quantité à sommer ne dépend pas de k donc la somme vaut. $n\sqrt{2}^{-3n+1}$

2.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n q^k &= q^{\sum_{k=1}^n k} \\ &= q^{\frac{n(n+1)}{2}}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n k+1}{\prod_{k=1}^n k} \\ &= \frac{n+1}{1} \text{ par télescopage} \\ &= n+1.\end{aligned}$$

4. On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\ &= (2+1)^n \text{ par la formule du binôme} \\ &= 3^n.\end{aligned}$$

Exercice 4 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer

$$S = \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=1}^p (i+j) \right).$$

1. Exprimer $\prod_{j=1}^p (i+j)$ avec des factorielles.
2. En déduire que $S = p! \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i}$.
3. Montrer, par récurrence sur n que

$$\sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i} = \binom{p+1+n}{p+1} \text{ et déduire la valeur de } S.$$

Corrigé

1. $\prod_{j=1}^p (i+j) = (i+1) \times (i+2) \times \dots \times (i+p) = \frac{(i+p)!}{i!}.$
- 2.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^n \frac{(i+p)!}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^n p! \frac{(i+p)!}{i! p!} \\ &= p! \sum_{i=0}^n \frac{(i+p)!}{i! p!} \\ &= p! \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S = p! \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i}.$$

3. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. Pour $n = 0$, la somme vaut $\binom{p}{0} = 1$ et le terme de droite vaut $\binom{p+1}{p+1} = 1$ donc la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que l'égalité est vraie au rang n . On la montre au rang suivant :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} \binom{i+p}{i} &= \sum_{i=0}^n \binom{i+p}{i} + \binom{p+n+1}{n} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{n+1} \text{ (par H.R.)} \\ &= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} \\ \text{car } \binom{p+n+1}{n+1} &= \binom{p+n+1}{p} \text{ par symétrie.} \\ &= \binom{p+n+2}{p+1} \text{ par la formule de Pascal} \end{aligned}$$

d'où la propriété au rang $n+1$. Par principe de récurrence la propriété est donc vraie pour tout n . On en déduit que

$$S = p! \binom{p+n+1}{p+1}.$$

Remarque On pouvait aussi utiliser les factorielles plutôt que la symétrie des coefficients binomiaux.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme

$$S = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

Corrigé

On calcule la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n ij \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\sum_{j=i+1}^n j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{(n-i)(i+1+n)}{2} \\ &\quad \text{(on reconnaît une somme arithmétique)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i(ni + n + n^2 - i^2 - i - ni) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (-i^3 - i^2 + (n + n^2)i) \\ &= \frac{1}{2} \left(- \sum_{i=1}^{n-1} i^3 - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + (n + n^2) \sum_{i=1}^{n-1} i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^3 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{12} \\ &\quad + \frac{(n + n^2)n(n-1)}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi
$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^3 - \frac{(n-1)(n)(2n-1)}{12} + \frac{(n+n^2)n(n-1)}{4}.$$

Exercice 6

1. Trouver une suite u_n de forme $u_n = (a + bn)3^n$ telle que pour tout entier n , $u_{n+1} - u_n = n3^n$.
2. En déduire $\sum_{k=0}^n k3^k$.

Corrigé

1. Soient a et b des réels et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = n3^n &\iff (b(n+1) + a)3^{n+1} - (bn + a)3^n = n3^n \\ &\iff (bn + b + a) \times 3 \times 3^n - (bn + a)3^n = n3^n \\ &\iff (2bn + (3b + 2a))3^n = n3^n \\ &\iff 2bn + 2b + 4a = n. \end{aligned}$$

Il suffit donc d'avoir $2b = 1$ et $3b + 2a = 0$, soit

$$b = \frac{1}{2} \text{ et } a = \frac{3b}{2} = -\frac{3}{4}.$$

- 2.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k3^k &= \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k \\ &= u_{n+1} - u_0 \text{ par télescopage} \\ &= \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4}\right)3^n + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k=0}^n k3^k = \left(\frac{n}{2} - \frac{3}{4}\right)3^n + \frac{3}{4}.$

un minimum, un maximum, et des bornes inférieures et supérieures.

Corrigé

L'étude de la fonction inverse montre que l'ensemble X est égal à $]0, +\infty[$. Donc il n'a ni maximum ni minimum. Il n'a pas de borne supérieure, mais admet 0 comme borne inférieure.

Exercice 8 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(4-x^2)}{x^2-1}.$$

Corrigé

Étude de f . Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x \in D_f \iff x \neq -2 \text{ et } \frac{x-3}{x+2} > 0.$$

On réalise un tableau de signe :

Exercice 7 Soit $X = \{\frac{1}{x}, x \in]0, +\infty[\}$. Déterminer si X admet

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$
$x + 2$	$-$	0	$+$	
$\frac{x-3}{x+2}$	$+$	$-$	0	$+$

D'après le tableau de signe,

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[.$$

Étude de g . Soit $x \in \mathbf{R}$.

$$x \in D_g \iff \begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ 4 - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \in]-2, 2[\\ x \notin \{1, -1\} \end{cases}$$

$$\iff x \in]-2, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2[.$$

Donc $D_g =]-2, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, 2[.$