DM # 3

Devoir à rendre le lundi 3 novembre.

Exercice 1 Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right) \text{ et } g : x \mapsto \frac{\ln(4-x^2)}{x^2-1}.$$

Exercice 2 Les fonctions suivantes sont-elles paires, impaires ou aucun des deux?

$$x \mapsto \cos(x^3), x \mapsto \sin(x)\tan(x), x \mapsto \sin(x)+1.$$

Exercice 3 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) = 2$
2. $\tan(4x+1) = 1$
3. $\tan(x) = -10$

Exercice 4

1. $$\sum_{i=0}^{n} (i+2)^2.$$
2. $$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{2^{2j}}.$$
3. $$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$
4. $$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}.$$
5. $$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{k+1}.$$

PROBLÈME : LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES HYPERBOLIQUES

On définit les fonctions ch (cosinus hyperbolique) et sh (sinus hyperbolique) pour tout réel x par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Étudier la parité des fonctions
2. Montrer que $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$
3. Dresser les tableaux de variations des deux fonctions. On prendra soin de noter les limites à l'infini et les valeurs en 0.
4. Tracer sur une même figure l'allure des courbes de ch et sh. On prêtera attention à la tangente en 0.
5. Montrer la formule

   $$\forall x \in \mathbf{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

   On note que sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et que ch réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.
6. On souhaite déterminer l'expression de la bijection réciproque de ch sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on fixe $y \geqslant 1$ et on souhaite résoudre l'équation

   $$y = \mathrm{ch}(x) \text{ pour } y \geqslant 1.$$

   a) En réalisant le changement de variable $\mathrm{X} = e^x$, montrer que $\mathrm{X} = y + \sqrt{y^2 - 1})$ ou $\mathrm{X} = y - \sqrt{y^2 - 1})$.
   b) Montrer que pour tout $y \in]1, +\infty[$, $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$.
   c) Déterminer la bonne valeur de X.
   d) En déduire que l'expression de la fonction réciproque de ch sur $[0, +\infty[$ est

   $$y \mapsto \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$

7. En résolvant l'équation

   $$y = \mathrm{sh}(x) \text{ pour } y \in \mathbf{R}$$

   déterminer l'expression de la fonction réciproque de sh sur $\mathbf{R}$. On s'inspirera de la question précédente.
8. On définit la tangente hyperbolique par

   $$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

   Quel est son domaine de définition ?

9. En s'inspirant de la fonction tangente, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

10. Montrer que th réalise une bijection strictement croissante sur un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ à déterminer. Pour calculer les limites, on pourra utiliser en le démontrant que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \mathrm{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

11. Soit $\mathrm{Y} = \mathrm{th}(\mathbf{R})$ l'ensemble des images de la fonction tangente hyperbolique (trouvé à la question précédente). Soit $y \in \mathrm{Y}$, en résolvant $y = \mathrm{th}(x)$ dans $\mathbf{R}$, trouver une expression de la fonction réciproque de th. L'expression utilisée pour le calcul de limite pourra être particulièrement utile.