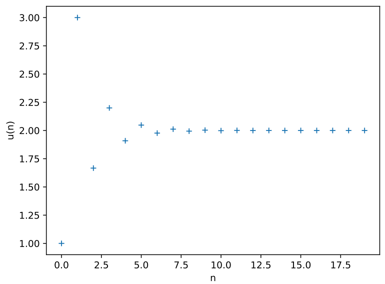
DM # 4

Devoir à rendre le lundi 17 novembre.

Exercice 1 Calculer les limites des expressions suivantes.

1. $\frac{n^3-1}{-n^3+12n^2+10^7n+10^9}$,
2. $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}$,
3. e^n-n^4,
4. $\frac{4^n+(-2)^n}{4^n-(-2)^n}$.

Exercice 2 On définit une suite (u_n) par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=1+\frac{2}{u_n}$.



1. Écrire un programme Python qui prend en entrée un entier `n` et renvoie la valeur u_n.
2. L'affichage des termes de la suite renvoie la formule précédente. Quelles conjectures peut-on faire ?
3. Faire l'étude de la fonction $f : x\in\mathbb{R}_+^* \mapsto 1+\frac{2}{x}$.
4. Montrer que (u_n) est bien définie et que
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_n\in[1,3].$$
5. Dresser le tableau de signe de la fonction
$$g : x\in[1,3]\mapsto f(f(x))-x.$$
6. Montrer que la suite extraite (u_{2n}) est croissante puis qu'elle converge.
7. Montrer que la suite (u_{2n+1}) converge.
8. Montrer que nécessairement, les limites de ces suites extraites sont solution de
$$f(f(\ell))=\ell.$$
9. En déduire que (u_n) converge. Donner sa limite.

Exercice 3

Soit $a\in\mathbb{R}_+$ (on prend $a\neq 1$). On définit la suite (u_n) par
$$u_0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite est bien définie et strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$,.
2. Si (u_n) converge , montrer que $\ell = \sqrt{a}$.
3. Réaliser l'étude de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > \sqrt{a}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
6. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{u_n}.$$

8. A partir de cette question, on suppose que $a \geqslant 1$ et avoir choisi u_0 tel que $|u_0 - \sqrt{a}| \leqslant 1$. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{a}| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}.$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. Pour obtenir $|u_n - \sqrt{a}| \leqslant \varepsilon$, quelle valeur de n faut-t-il prendre ?
10. En déduire une fonction Python qui prend en entrée un flottant `epsilon` et renvoie u_n et la valeur de n correspondante.