DEVOIR MAISON # 5

Révisions DS 3

1. EXERCICES

Exercice 1 Résoudre le système suivant, en fonction du paramètre $m \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} 3x + y - z & = 1 \\ x - 2y + 2z & = m \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^{10}}{e^n - n^{20}}, \quad b) \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x) + e^x}{e^x + 1}, \quad c) \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7 + 2}{x^7 + x^6}.$$

Corrigé

a)

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \frac{e^n - n^{10}}{e^n - n^{20}} = \frac{1 - \frac{n^{10}}{e^n}}{1 - \frac{n^{20}}{e^n}}.$$

Or, par croissances comparées,

$$\lim n^{10}/e^n = \lim n^{20}/e^n = 0$$

donc la limite demandée est 1.
b). $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée, donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x) + e^x}{e^x + 1} = \frac{0 + e^0}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}.$$

c) On conserve les termes de lus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^7 + 2}{x^7 + x^6} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^7}{x^7} = 1.$$

Exercice 3 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

Corrigé

$D_f =]0, +\infty[$.

2. Montrer que f réalise une bijection entre D_f et un intervalle à déterminer.

Corrigé

f est continue et strictement croissante car c'est la somme de deux fonctions strictement croissantes. Elle réalise donc une bijection de $]0, +\infty[$ vers son ensemble image $]-\infty, +\infty[$. En effet

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet une unique solution x_n. Justifier que $x_n \in]0, 1]$.

Corrigé

Par la question précédente, $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f dans $]0, +\infty[$. De plus $f(1) = 1 \geqslant \frac{1}{n}$ donc par stricte croissance de f, $x_n \leqslant 1$.

4. Montrer que (x_n) est une suite décroissante.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_{n+1}) \leqslant f(x_n)$ or f est strictement croissante donc $x_{n+1} \leqslant x_n$.

5. Montrer que x_n converge vers une limite ℓ vérifiant

$$\ell + \ln(\ell) = 0.$$

Corrigé

(x_n) est décroissante et minorée donc elle converge vers $\ell \in \mathbf{R}$. En passant à la limite dans $f(x_n) = \frac{1}{n}$, on obtient, comme f est continue, $f(\ell) = 0$ soit $\ell + \ln(\ell) = 0$.

Exercice 4 On définit une suite (u_n) par

$$u_n = e^{u_n} - 1, \qquad u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la fonction $g : x \in \mathbf{R} \mapsto e^x - 1 - x$. Dresser son tableau variations et son tableau de signe.

Corrigé

g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = e^x - 1$. Ainsi

$$\begin{aligned} g'(x) > 0 &\iff e^x > 1 \\ &\iff x > 0. \end{aligned}$$

Cela donne le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

2. Montrer que (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= e^{u_n} - 1 - u_n \\ &= g(u_n) \\ &\geqslant 0 \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

3. Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim u_n = 0$.

Corrigé

Soit ℓ la limite finie de (u_n). En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient,

$$\ell = e^{\ell} - 1 \iff g(\ell) = 0$$

donc $\ell = 0$ d'après le tableau de variations de g.

4. Dans cette question, $u_0 \leqslant 0$. Montrer que (u_n) converge.

Corrigé

On montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant 0$ (simple). Ainsi (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

5. Dans cette question $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$

Corrigé

On suppose par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ, alors par croissance de u_n, $\ell \geqslant u_0 > 0$. Donc $\ell > 0$. Or $\ell = 0$ par Q3 ce qui est absurde. Donc (u_n) ne converge pas. Comme elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Exercice 5 Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M^2 = 3M - 2I_2$.

Corrigé

Calcul simple.

2. En déduire que M est inversible et exprimer son inverse en fonction de M et de I_2.

Corrigé

On obtient $M^3 - 3M = -2I_2$ donc $M(-\frac{M-3I_2}{2})$ donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{3}{2}I_2 - \frac{1}{2}M$.

3. Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $M^n = u_n M + v_n I_2$. On montrera que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2v_n$ et $v_{n+1} = -2u_n$.

Corrigé

Initalisation. $M^0 = 0M + 1I_2$. Il suffit de prendre $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose qu'il existe des réels u_n et v_n tels que $M^n = u_n M + v_n I_2$. Dès lors,

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= MM^n \\ &= M(u_n M + v_n I_2) \\ &= u_n M^2 + v_n M \\ &= u_n(3M - 2I_2) + v_n M \\ &= (3u_n + v_n) - 2u_n I_2. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $u_{n+1} = 3u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -2u_n$ ce qui prouve la propriété au rang suivant.

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

5. Vérifier que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

Corrigé

$u_1 = 3u_0 + v_0 = 1$.

6. En déduire une formule pour u_n, puis pour v_n.

Corrigé

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $\mathrm{P}(x) = x^2 - 3x + 2$. Ses racines sont 1 et -2 donc il existe λ et μ des réels tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu 1^n = \lambda 2^n + \mu.$$

$u_0 = 0$ donne $\lambda + \mu = 0$ et $u_1 = 1$ donne $2\lambda + \mu = 1$.
La résolution du système donne $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ donc pour tout n,

$$u_n = 2^n - 1.$$

De plus

$$v_n = u_{n+1} - 3u_n = 2^{n+1} - 1 - 3 \times 2^n + 3 = 2 + 2^n(2-3) = 2 - 2^n.$$

7. Donner une formule pour M^n.

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^n &= (2^n - 1)\mathrm{M} + (2 - 2^n)\mathrm{I}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 3 \times 2^n - 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 0 \\ 0 & 2 - 2^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 1 - 2^n & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 8A$.

Corrigé

$$A^2 - 8A = -15I_2.$$

2. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A et I_2.

Corrigé

$A(A-8I_2) = -15I_2$ donc $A(\frac{8}{15}I_2 - \frac{1}{15}A) = I_2$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{8}{15}I_2 - \frac{1}{15}A$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.

Corrigé

$1 \times -1 - (-2)1 = 1 \neq 0$ donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer.

Corrigé

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

qui est bien diagonale.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, A^n = PD^nP^{-1}$.

Corrigé

Question très classique, faite plusieurs fois. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

6. Donner l'expression explicite de A^n.

Corrigé

$$A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} 2\times 5^n - 3^n & 5^n - 3^n \\ 2(3^n - 5^n) & -5^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}.$$

7. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} & = -4u_n + v_n \end{cases}$$

On définit pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = A^nX_0$.

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$, on calcule AX_n.

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7u_n + 2v_n \\ -4u_n + v_n \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}, X_{n+1} = AX_n$.
On montre ensuite par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = A^nX_0$.
Initialisation. en effet, $A^0X_0 = X_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $X_n = A^nX_0$. Dès lors $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$ d'où la propriété au rang suivant.
La proposition est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par principe de récurrence.

8. Donner une expression explicite pour la suite (u_n).

Corrigé

u_n est le premier coefficient de X_n. On calcule alors A^nX_0

$$\begin{pmatrix} 2\times 5^n - 3^n & 5^n - 3^n \\ 2(3^n - 5^n) & -5^n + 2\times 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 5^n - 3^n + 5^n - 3^n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times 5^n - 2\times 3^n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 3\times 5^n - 2\times 3^n$.

Exercice 7

Soit (u_n) la suite réelle définie par ses premiers termes u_0, u_1, u_2 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

On pose pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Corrigé

Soit $n \in \mathbf{N}$, on calcule AX_n :

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbf{N}, AX_n = X_{n+1}$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$.

Corrigé

Démonstration par récurrence.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Corrigé

On obtient

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D à déterminer. On obtient

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Corrigé

Démonstration par récurrence.

6. En déduire A^n.

Corrigé

On a :

$$\begin{aligned}
A^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & -2^{n+1} \\ (-1)^n & -3(-1)^n & 2(-1)^n \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2^{n+3}+(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 & -2^{n+3}+2(-1)^n+6 \\ 2^{n+2}+(-1)^{n+1}+3 & 3(-1)^n+3 & -2^{n+2}+2(-1)^{n+1}+6 \\ 2^{n+1}+(-1)^n-3 & -3(-1)^n+3 & -2^{n+1}+2(-1)^n+6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. En déduire l'expression de u_n. (Indication : comment lire u_n dans X_n ?)

Corrigé

$$X_n = A^nX_0$$

donc u_n est la troisième composante de la matrice colonne $A^n X_0$ soit de

$$A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

soit ...

$$u_n = \frac{1}{6}\left[\left(2^{n+1} + (-1)^n - 3\right) u_2 + \left(-3(-1)^n + 3\right) u_1 + \left(-2^{n+1} + 2(-1)^n + 6\right) u_0\right]$$