DEVOIR MAISON # 6

On considère la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue en 0. On notera toujours f la fonction prolongée.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big)$$

   a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\ln(t) < 0$
   b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.
3. Montrer que f est dérivable sur $[0,1[$.
4. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant figurer la tangente en 0 et les asymptotes infinies éventuelles.
6. Justifier que f est réalise une bijection entre $[0,1[$ et un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variations de f^{-1}, limites comprises.

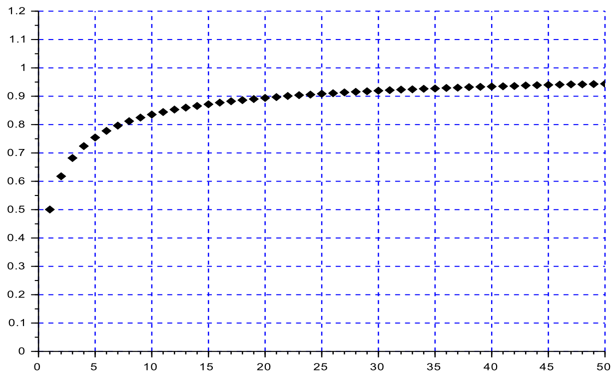
Partie B - Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
   En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n.
9. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.
10. Déterminer u_1 et u_2.
11. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while ____________:
        c = (a + b) / 2
        if (c**n + c - 1) > 0 :
            ___________
        else:
            ___________
    return(_____)
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?



12. a) Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.
b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.