DEVOIR MAISON # 6

On considère la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in\,]0,1[,\ f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\big(\ln(x)\big)^2}\big(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\big)$$

Solution

f des dérivable sur son ensemble de définition $]0,1[$ comme composée produit de fonction dérivables. De plus f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(1-x)$ et $v = \ln(x)$ donc pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{-\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x}}{\ln(x)^2} \\ &= -\frac{(1-x)\ln(1-x) + x\ln(x)}{x(1-x)\ln(x)^2}. \end{aligned}$$

2. Montrer f est continue en 0.

Solution

On calcule la limite de $f(x)$ en 0^+. On a

$$\lim(\ln(1-x)) = 0 \text{ et } \lim\ln(x) = -\infty$$

donc par quotient $\lim f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

3. a) Justifier : $\forall t \in\,]0,1[,\ t\ln(t) < 0$

Solution

Soit $t \in]0,1[$, alors $\ln(t) < 0$ donc $t\ln(t) > 0$.

b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.

Solution

Comme x est dans $]0,1[$, $(x)(1-x)$ est positif donc le dénominateur est toujours positif. De plus, par la question précédente $x\ln(x) < 0$ et comme $(1-x) \in]0,1[$ il en est de même pour $(1-x)\ln(1-x)$. Dès lors

$$-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x) > 0$$

et donc $f'(x) >$. Ainsi f est strictement croissante.

4. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. (On calculera $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. Indication : on doit trouver zéro !)

Solution

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x)-\ln(1-0)}{x-0} = g'(0)$$

où $g : x \mapsto \ln(1-x)$ est bien dérivable avec $g'(x) = \frac{-1}{1-x}$ d'où $g'(0) = -1$.
Dès lors

$$\lim \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{\ln(1-x)}{x} \times \frac{1}{\ln(x)} = 0\textbf{par quotient}.$$

5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

Solution

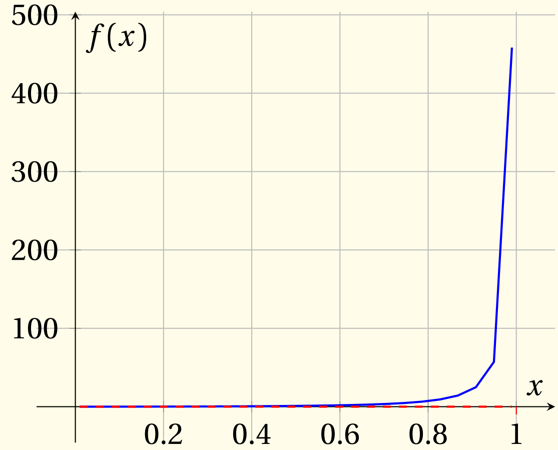
Le numérateur tend vers 0^- par continuité du logarithme. De plus

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$$

donc par quotient la limite de f en 1 est $+\infty$. On en déduit que la courbe admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f en faisant figurer la tangente en 0 et les asymptotes infinies éventuelles.

Solution



7. Justifier que f est réalise une bijection entre $[0,1[$ et un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variations de f^{-1}, limites comprises.

Solution

f est strictement croissante et continue sur $[0,1[$ donc elle réalise une bijection entre $[0,1[$ et son image $[0,+\infty[$ obtenue à partir des limites. f^{-1} réalise donc une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ vers $[0,1[$.

x	0	1
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

Partie B - Étude d'une suite

On note, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbf{R}_+$ de la fonction $x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbf{R}_+$ que l'on note u_n.

Solution

La dérivée de la fonction est donnée par

$$x \mapsto nx + 1 > 0.$$

Donc la fonction est strictement croissante et continue et vaut -1 en 0 tend vers

$+\infty$ en $+\infty$. Ainsi l'équation admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$ par le théorème de la bijection.

9. Montrer que, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0,1[$.

Solution

Comme la fonction vaut 1 en 1 et -1 en 0 et qu'elle est strictement monotone, l'unique antécédent de 0 est dans $]0,1[$.

10. Déterminer u_1 et u_2.

Solution

Pour $n=1$ l'équation dévient

$$2x-1=0 \iff x=\frac{1}{2}.$$

Donc $u_1=\frac{1}{2}$. Pour $n=2$ elle devient

$$x^2+x-1=0.$$

C'est une équation du second degré de discriminant

$$\Delta=5.$$

Donc $u_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ car l'autre solution $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ est négative.

11. a) Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbf{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while ____________:
        c = (a + b) / 2
        if (c**n + c - 1) > 0 :
            ___________
        else:
            ___________
    return(_____)
```

Solution

```python
def valeur_approchee(n):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > 10**(-3):
        c = (a + b) / 2
        if (c**n + c - 1) > 0 :
           b = c
        else:
           a = c
    return( (a+b)/2)
```

b) On représente alors les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et on obtient le graphe suivant.
Quelles conjectures peut-on faire sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

Solution

On conjecture que la suite est croissante et majorée donc converge, peut être vers 1.

c) i. Montrer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$: $f(u_n) = n$.

Solution

Pour tout n de $\mathbf{N}^*$:

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{\ln(u_n^n}{u_n} \\ &= n\frac{\ln(u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= n. \end{aligned}$$

ii. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

Solution

La suite (n) est croissante et la bijection réciproque de f est croissante par théorème de la bijection donc par composition $(f(u_n))$ est croissante.

iii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution

$\lim n = +\infty$ donc $\lim f^{-1}(n) = \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1$.