

DEVOIR MAISON # 9

Partie I

1. À chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et $1/3$ pour l'alternative contraire), on reconnaît en X une loi binomiale

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

2. On voit que

$$P(A) = P([X = 0] \cup [X = 2]) = P([X = 0]) + P([X = 2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1 + 3 \times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

3. Pour chaque valeur de X , on a une valeur différente de G . Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

4. On calcule l'espérance

$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G = -30) - 10P(G = -10) + 20P(G = 20) \\ &= -30P(X = 3) - 10P(X = 1) + 20P(X = 2) \\ &= -30 \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{-120}{27} \end{aligned}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

1. a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) = P(X \in 2\mathbf{N}) = P(A),$$

et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(Y) = E(2Z - 1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

2. a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.
 b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

3. D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

4. On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1-2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1-2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

1. On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X , ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^n 10k(-1)^k P(X = k) \\ &= 10 \sum_{k=0}^n (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

3. C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned} E(G) &= 10 \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= 10n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-p)^j (1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

4. On connaît déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n \text{ impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

5. a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur \mathbf{R} et *a priori* sur $[0; 1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0	$1/2n$	$1/2$
$f'(x)$		+	0
f	0	$f(1/2n)$	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

- b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

Partie IV

1. Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	9/16	6/16	1/16

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance

$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$

et

$$V(G_i) = E(G_i^2) - E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

2. Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$

et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i ,

$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

3.

$$\begin{aligned} |J - 500| \geq 400 &\iff J - 500 \geq 400 \text{ ou } J - 500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'évènement

$$[J \leq 100] \subset [|J - 500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

4. En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

5. Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.