DEVOIR MAISON # 9

Date : 22 mars 2026

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. Si la série numérique de terme général u_n converge, on dit qu'elle converge a l'ordre 1 et on note alors $\left(\mathrm{R}_{1,n}\right)_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_{1,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Si à nouveau la série de terme général $\mathrm{R}_{1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge à l'ordre 2 et note $(\mathrm{R}_{2n})_{n,30}$ la suite des restes de cette série, autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R}_{2,n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{R}_{1,k}.$$

Plus généralement, pour tout entier $p \geqslant 2$, si la série de terme général $\mathrm{R}_{p-1,n}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge a l'ordre p et on note alors $\left(\mathrm{R}_{p,n}\right)_{n\geqslant 0}$ la suite des restes de cette série :

$$\mathrm{R}_{p,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{R}_{p-1,k}$$

On peut noter : pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{R}_{0,n} = u_n$. Le but de cet exercice est d'étudier, sur certains exemples, l'ordre de la convergence de la série de terme général u_n.

1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.
   a) Rappeler la condition nécessaire est suffisante sous laquelle $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On se place désormais sous cette condition.
   b) Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier que :
   $$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
   c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:
   $$\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant \mathrm{R}_{1,n} \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

d) En déduire que :

$$R_{1,n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

e) Sous quelle condition nécessaire et suffisante sur α, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge-t-elle à l'ordre 2 ?

f) Conjecturer à quel ordre la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

2. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \frac{1}{n^n}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

b) Montrer que, pour tout $k \geqslant 3$, $u_k \leqslant \frac{1}{3^k}$, puis en déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_{1,n} \leqslant \frac{1}{2 \times 3^n}$$

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre 2, et que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{2,n} \leqslant \frac{1}{4 \times 3^n}$$

d) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant R_{p,n} \leqslant \frac{1}{2^p \times 3^n}$$

e) La série $\sum_{n\geqslant 1} R_{n,n}$ converge-t-elle ?

3. On considère, dans cette question uniquement, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

a) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = 0$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} = \int_0^1 \iota^k \, dt$, montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} \, dt$$

c) En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge et que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{1,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} \, dt$$

d) Montrer par récurrence que, pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ converge à l'ordre p et que pour tout $n \geqslant 0$:

$$R_{p,n} = \int_0^1 \frac{(-t)^{n+p}}{(1+t)^p} \, dt$$