

DEVOIR SURVEILLÉ # 1

Date : 24 septembre 2025

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon!
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie.
- Il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$n \text{ est pair} \iff n^2 + 11 \text{ est impair.}$$

Exercice 2 Déterminer l'expression explicite de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}.$$

Exercice 3 Résoudre l'inéquation

$$\ln(x)^2 - 6\ln(x) + 8 < 0.$$

Exercice 4 Pour chacune des affirmations suivantes : donner leur négation, puis démontrer si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R}, e^x \geq n$.
2. $\exists x \in]0, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[, y \geq x$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, n \leq x$.

Exercice 5 Déterminer un réel $a \in \mathbf{R}$ tel que l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{e^x - 2}$ est $[a, +\infty[$. Démontrer que :

$$\forall y \in [0, +\infty[, \exists ! x \in [a, +\infty[, y = \sqrt{e^x - 2}.$$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

1. On définit la suite (v_n) pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}.$$

2. En déduire une expression de v_n puis de u_n .

Exercice 7 Résoudre l'inéquation

$$x^2 \leq |2x - 1|.$$

Exercice 8

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n^3 + 6n^2 + 5n + 2 \leq (n+2)^3$. (Pas de récurrence ici pour cette question!).
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \end{cases}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.

1. PROBLÈME

Partie I

On considère la fonction réelle f définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

1. Étudier le signe de $1+x+x^2$. Expliquer pourquoi cela justifie que la fonction est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

4. Justifier que f est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

5. Dresser le tableau de variations de f .
6. Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en 0.
7. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - x = -x^2 \times \frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

En déduire que pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) \leq x$.

8. Tracer (C_f) et (T). On prêtera attention à la position relative des deux courbes. (Laquelle est au dessus de l'autre).

Partie II

Dans cette partie, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u(1) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1 + \frac{1}{n}}.$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

3. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

4. Conclure que (u_n) converge et donner sa limite.

Partie III (Bonus)

Théorème 1

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Dans cette partie, on étudie la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v(1) = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant une question de la Partie I, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0.$$

2. En utilisant une question de la Partie I, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
3. En déduire que (v_n) converge vers un réel ℓ .
4. On admet que si (v_n) converge vers un réel ℓ , $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de la limite ℓ .
5. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \neq -1$.