

DEVOIR SURVEILLÉ # 1

Date : 24 septembre 2025

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon!
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque exercice. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie.
- Il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que

n est pair $\iff n^2 + 11$ est impair.

Solution

On raisonne par double implication.

Implication directe. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que n est pair : $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$. On a alors

$$n^2 + 11 = 4k^2 + 11 = 2(2k^2 + 5) + 1$$

donc $n^2 + 11$ est impair.

Implication réciproque. On raisonne par contraposée : on suppose n impair et on doit montrer que $n^2 + 11$ est pair. Il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$. Ainsi

$$n^2 + 11 = 4k^2 + 4k + 1 + 11 = 2(2k^2 + 2k + 6)$$

donc $n^2 + 11$ est pair.

Par double implication, on a bien montré l'équivalence.

Exercice 2 Déterminer l'expression explicite de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n. \end{cases}.$$

Solution

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de polynôme caractéristique $x^2 - 6x + 9$ dont le discriminant vaut $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 = 0$. Le polynôme admet 3 comme unique racine. Ainsi il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 3^n + \mu n 3^n.$$

En prenant $n = 0$ on obtient $1 = \lambda$ et en prenant $n = 1$ on obtient $0 = 3\lambda + 3\mu$. Ainsi $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - n 3^n = (1 - n)3^n.$$

Exercice 3 Résoudre l'inéquation

$$\ln(x)^2 - 6\ln(x) + 8 < 0.$$

Solution

L'équation est à résoudre pour $x > 0$. On pose $X = \ln(x)$, et l'inéquation devient

$$X^2 - 6X + 8 < 0.$$

C'est une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 8 = 4 > 0$. Le trinôme a deux racines $X_1 = \frac{6-2}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{6+2}{2} = 4$. D'après le coefficient dominant, le trinôme est négatif entre ses racines. Ainsi

$$\begin{aligned} X^2 - 6X + 8 < 0 &\iff 2 < X < 4 \\ &= 2 < \ln(x) < \ln(4) \\ &= e^2 < x < e^4 \text{ car l'exponentielle est strictement croissante.} \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des solutions est $]e^2, e^4[$.

Exercice 4 Pour chacune des affirmations suivantes : donner leur négation, puis démontrer si l'affirmation est vraie ou fausse.

1. $\forall n \in \mathbf{N}, \exists x \in \mathbf{R}, e^x \geq n$.
2. $\exists x \in]0, +\infty[, \forall y \in]0, +\infty[, y \geq x$.
3. $\forall x \in \mathbf{R}, \exists n \in \mathbf{N}, n \leq x$.

Solution

Les négations sont :

1. $\exists n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, e^x < n$.
2. $\forall x \in]0, +\infty[, \exists y \in]0, +\infty[, y < x$.
3. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, n > x$.

Pour ce qui est des preuves :

1. Elle est vraie. Soit $n \in \mathbf{N}$, cherchons $x \in \mathbf{R}$ tel que $e^x \geq n$. Il suffit de prendre $x = \ln(n+1)$ car alors $e^{\ln(n+1)} = n+1 \geq n$. (Attention, prendre $x = \ln(n)$ ne fonctionne pas pour $n = 0$).
2. Elle est fausse. On montre que la négation est vraie. Soit $x > 0$, on cherche y qui convient. $y = \frac{x}{2}$ convient car $0 < \frac{x}{2} < y$.
3. Elle est fausse. On montre que la négation est vraie. On cherche x qui convient : on fixe $x = -1$. Alors pour tout $n \in \mathbf{N}, n > x$ donc la proposition est vraie.

Exercice 5 Déterminer un réel $a \in \mathbf{R}$ tel que l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{e^x - 2}$ est $[a, +\infty[$. Démontrer que :

$$\forall y \in [0, +\infty[, \exists ! x \in [a, +\infty[, y = \sqrt{e^x - 2}.$$

Solution

La fonction est définie pour $x \in \mathbf{R}$ tel que $e^x - 2 \geq 0 \iff x \geq \ln(2)$ donc sur $[\ln(2), +\infty[$.

Soit $y \in [0, +\infty[$, cherchons $x \in [\ln(2), +\infty[$,

$$\begin{aligned} y = \sqrt{e^x - 2} &\iff y^2 = e^x - 2 \text{ car les nombres sont positifs} \\ &\iff e^x = y^2 + 2 \\ &\iff x = \ln(y^2 + 2). \end{aligned}$$

On vérifie bien que $\ln(y^2 + 2) \geq \ln(2)$ donc $x \in [\ln(2), +\infty[$.
Ainsi x existe et est bien unique. On a donc prouvé la proposition.

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

1. On définit la suite (v_n) pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{3^n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}.$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{u_n}{3^n} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} v_n + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}$.

2. En déduire une expression de v_n puis de u_n .

Solution

(v_n) est une suite arithmético-géométrique. On cherche ℓ tel que $\ell = \frac{2}{3}\ell + \frac{1}{3} \iff \ell = 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - 1 &= \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}(v_n - 1). \end{aligned}$$

$(v_n - 1)$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n (v_0 - 1) = -\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ donc

$$u_n = 3^n \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n - 2^n.$$

Exercice 7 Résoudre l'inéquation

$$x^2 \leq |2x - 1|.$$

Solution

On doit traiter deux cas en fonction du signe de $2x - 1$. On a $2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}$.

Cas 1. ($x < \frac{1}{2}$) L'équation devient

$$x^2 \leq 1 - 2x \iff x^2 + 2x - 1 \leq 0.$$

C'est une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 8$. Le polynôme a deux racines $r_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$ et $r_2 = \frac{-2+\sqrt{8}}{2} = -1 + \sqrt{2}$. Il est négatif entre ses racines, d'après le coefficient dominant, donc sur $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$. On remarque que $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \subset]-\infty, \frac{1}{2}[$ (car $-1 + \sqrt{2} = 0.41\dots$) donc on garde $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}]$ comme ensemble solution dans ce cas là.

Cas 2. ($x \geq \frac{1}{2}$) L'équation devient

$$x^2 \leq 2x - 1 \iff x^2 - 2x + 1 \leq 0 \iff (x - 1)^2 \leq 0 \iff x = 1$$

. 1 est bien dans l'ensemble étudié donc l'ensemble solution dans ce cas est $\{1\}$.

Conclusion : l'ensemble solution est $[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \cup \{1\}$.

Exercice 8

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 6n^2 + 5n + 2 \leq (n + 2)^3$. (Pas de récurrence ici pour cette question!).
- On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2}{n+2}u_n \end{cases}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n^2$.

Solution

1. En développant

$$\begin{aligned} (n + 2)^3 &= n^3 + 6n^2 + 12n + 8 \\ &\geq n^3 + 6n^2 + 5n + 2 \text{ car } n \geq 0. \end{aligned}$$

2. On raisonne par récurrence double.

Double initialisation.

Double hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose la propriété vraie aux rangs n et $n + 1$. Montrons la au rang suivant :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{2u_n}{n+2}$$

donc, d'après les hypothèses :

$$1 + \frac{2}{n+2} \leq u_{n+2} \leq (n+1)^2 + \frac{2n^2}{n+2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 1 \leq u_{n+2} &\leq \frac{(n+2)^2(n+1) + 2n^2}{n+2} \\ &\leq \frac{n^3 + 6n^2 + 5n + 2}{n+2} \text{ en développant} \\ &\leq \frac{(n+2)^3}{n+2} \text{ d'après la question 1} \\ &\leq (n+2)^2 \text{ d'où l'hérédité.} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence double, on conclut que l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. PROBLÈME

Partie I

On considère la fonction réelle f définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note (C_f) sa courbe représentative.

1. Étudier le signe de $1+x+x^2$. Expliquer pourquoi cela justifie que la fonction est bien définie sur $\mathbf{R}$.

Solution

C'est un trinôme du second degré de discriminant égal à -3 . Le trinôme est donc toujours strictement positif.

En particulier, il ne s'annule jamais donc la fonction est bien définie.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Solution

Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} &= \frac{1}{x + 1 + \frac{1}{x}} \\ &= \frac{x}{x^2 + x + 1} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3. En déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Solution

Par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

4. Justifier que f est dérivable et que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.$$

Solution

f est un quotient de polynôme donc dérivable sur son ensemble de définition.
Par dérivation d'un quotient,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) &= \frac{1+x+x^2-x(1+2x)}{(1+x+x^2)^2} \\ &= \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}.\end{aligned}$$

On a donc prouvé que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$.

5. Dresser le tableau de variations de f .

Solution

Le signe de f' est le signe de $1-x^2$, d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	-1	3	0	

6. Déterminer l'équation de la tangente (T) de (C_f) en 0.

Solution

L'équation est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - x = -x^2 \times \frac{1+x}{1+x+x^2}.$$

En déduire que pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $f(x) \leq x$.

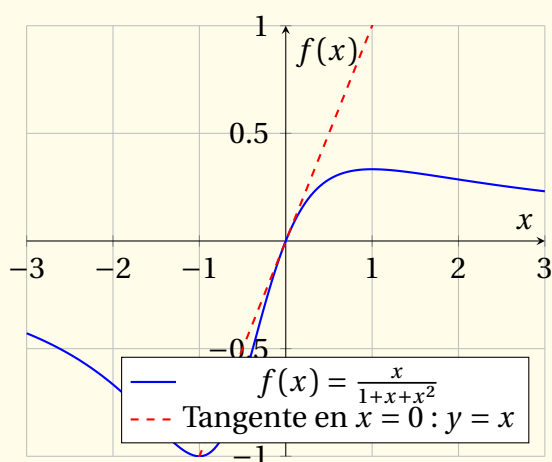
Solution

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}f(x) - x &= \frac{x}{1+x+x^2} - \frac{x(1+x+x^2)}{1+x+x^2} \\&= \frac{x - (x+x^2+x^3)}{1+x+x^2} \\&= \frac{-x^2-x^3}{1+x+x^2} \\&= -x^2 \times \frac{1+x}{1+x+x^2}.\end{aligned}$$

Soit $x \geq -1$, on a alors $f(x) - x \leq 0$, donc $f(x) \leq x$.

8. Tracer (C_f) et (T) . On prêter attention à la position relative des deux courbes. (La quelle est au dessus de l'autre).

Solution

Partie II

Dans cette partie, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u(1) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1 + u_n + u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \text{ d'après Q1.2} \\ &= \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

2. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}.$$

Solution

$\frac{1}{n} > 0$ donc $\frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} < \frac{1}{1+n}$ d'où l'inégalité.

3. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Solution

Initialisation. La propriété est vraie au rang $n = 1$ car $0 \leq 1 \leq \frac{1}{1}$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. Comme f est croissante sur $[0, 1]$, on a

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

d'après la question précédente. D'où la propriété au rang suivant.

Par principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Conclure que (u_n) converge et donner sa limite.

Solution

$\frac{1}{n}$ tend vers zéro, donc par encadrement (d'après la question précédente),
 u_n tend aussi vers zéro.

Partie III (Bonus)

Théorème 1

1. Toute suite croissante et majorée converge.
2. Toute suite décroissante et minorée converge.

Dans cette partie, on étudie la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$v(1) = -2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant une question de la Partie I, démontrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, -1 \leq v_n \leq 0.$$

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \geq 0$ car $v_n \geq -1$ en utilisant la question Q1.7.

2. En utilisant une question de la Partie I, montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

Solution

Initialisation. Pour $n = 2$, $v_2 = \frac{-2}{1-2+4} = -\frac{2}{3}$ qui est bien dans l'intervalle.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $-1 \leq v_n \leq 0$. Par croissance de f sur $[-1, 0]$ (cf. Tableau de variations), $f(-1) \leq f(v_n) \leq f(0)$ donc $-1 \leq v_{n+1} \leq 0$ d'où l'hérédité.

Ainsi par principe de récurrence, c'est vrai pour tout $n \geq 2$.

3. En déduire que (v_n) converge vers un réel ℓ .

Solution

La suite est décroissante et minorée par -1 (ou -2 si on considère le terme v_1 ...) donc elle converge.

4. On admet que si (v_n) converge vers un réel ℓ , $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de la limite ℓ .

Solution

On a

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{\ell}{1 + \ell + \ell^2} \iff \ell + \ell^2 + \ell^3 = \ell \\ &\iff \ell^2 + \ell^3 = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell + 1 = 0 \\ &\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = -1.\end{aligned}$$

Or 0 ne peut pas être la limite de v_n car (v_n) est décroissante (à partir du rang 2) et strictement négative. Donc $\ell = -1$.

5. Montrer par l'absurde que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_n \neq -1$.

Solution

D'après les variations de f , $f(x) = x \iff x = 1$. Ainsi, si on suppose qu'il existe un rang n tel que $v_n = -1$, on obtient $v_{n-1} = 1$ et par récurrence "descendante" $v_2 = 1$ puis $v_1 = 1$, ce qui est absurde car $v_1 = -2$.