DEVOIR SURVEILLÉ # 2

Date : 12 novembre 2025

Durée : 4h

Quelques consignes :

- Accordez un grand soin à la présentation et à la rédaction des résultats. Cela, comme aux concours, sera largement pris en compte dans l'évaluation de la copie. Utilisez le brouillon !
- Traitez les questions dans l'ordre. Encadrez les résultats. Laissez une marge suffisante pour les points et commentaires. Revenir sur une nouvelle page au début de chaque grande partie. Numérotez les pages (en indiquant bien le nombre total de pages).
- Il est possible de sauter une question en l'indiquant clairement sur la copie.
- Il est vain d'essayer d'arnaquer le correcteur : cela serait sévèrement sanctionné.
- Les devoirs en prépa et les sujets de concours sont longs. Avancez à votre rythme en utilisant tout le temps qui vous est proposé.
- Les calculatrices et documents sont interdits.

1. CALCUL DE SOMMES

Calculer les sommes suivantes :

1. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k}}.$$
2. $$\sum_{k=0}^{n} 2(n-k+1).$$
3. $$\sum_{k=1}^{n+2} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$
4. $$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{(2k)^2}.$$
5. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \ln(i^j).$$

Solution

1.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^{2k}} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{-1}{9}\right)^k \\
&= \frac{1-(-\frac{1}{9})^n}{1-(-\frac{1}{9})} \text{ car on reconnaît une somme géométrique.} \\
&= 9\frac{1-(-\frac{1}{9})^n}{9+1} \\
&= \frac{9}{10}\left(1-(-\frac{1}{9})^n\right).
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2(n-k+1) &= 2\sum_{k=0}^{n}(n-k+1) \\
&= 2\sum_{j=1}^{n+1} j \text{ en réalisant le changement de variable } j=n-k+1 \\
&= 2\frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
&= (n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n+2} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \ln(k+1)-\ln(k) \\
&= \ln(n+3)-\ln(1) \text{ par télescopage} \\
&= \ln(n+2).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{(2k)^2} &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)(k+1)}{2^n\prod_{k=2}^{n}k^2}\\ &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{2^n\prod_{k=2}^{n}k\prod_{k=2}^{n}k}\\ &= \frac{\prod_{i=2}^{n-1}i\prod_{j=3}^{n}j}{2^n(n!)^2} \text{ en réalisant les changements de variables } i=k-1 \text{ et } j=k+1\\ &= \frac{(n-1)!(n+1)!}{2\times 2^n(n!)^2}\\ &= \frac{n+1}{2^{n+1}n}) \text{ en simplifiant les factorielles.}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}j\ln(i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\ln(i)\sum_{j=1}^{n}j\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ln(\prod_{i=1}^{n}i) \text{ en utilisant les propriétés du logarithme}\\ &= \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).\end{aligned}$$

2. EXERCICES

Exercice 1 Soient

$$\mathrm{A}=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2, x+y-1=0\} \text{ et } \mathrm{B}=\{(t,1-t), t\in\mathbf{R}\}.$$

Montrer, par double inclusion, que $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

Solution

Montrons que $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ Soit $\mathrm{X}=(x,y)\in\mathrm{A}$. On a $y=1-x$ donc $\mathrm{X}=(x,1-x)$ donc $\mathrm{X}\in\mathrm{B}$ (cela se voit en prenant $t=x$.) Ainsi $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$.
Montrons que $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$ Soit $\mathrm{X}\in\mathrm{B}$, il existe $t\in\mathbf{R}$ tel que $\mathrm{X}=(t,1-t)$. On a $x\in\mathbf{R}^2$ et $t+(1-t)-1=0$ donc $\mathrm{X}\in\mathrm{B}$. Ainsi $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}$.

Par double inclusion, on a montré que $A = B$**.**

Exercice 2 Soit $x \in]0,1]$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = x \\ v_0 = \sqrt{1-x^2} \\ \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n^2 - v_n^2 \\ \forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = 2u_n v_n \end{cases}.$$

1. On définit $t = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Justifier que $t \in [0, +\infty[$.
2. On note $\alpha = \arctan(t)$. Justifier que $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3. Montrer que $\cos(\alpha)^2 = x^2$ puis que $\cos(\alpha) = x$.
4. Montrer que $\sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \cos(2^n\alpha)$ et $v_n = \sin(2^n\alpha)$.

Solution

1. $x > 0$ et $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ donc $t \geqslant 0$.
2. $t \geqslant 0$ donc $\arctan(t) \in [0, \frac{\pi}{2}[$.
3. $$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) &= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha)} \\ &= \frac{1}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1-x^2}{x^2}} \\ &= \frac{x^2}{x^2+1-x^2} \\ &= x^2. \end{aligned}$$

   Comme $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\alpha) \geqslant 0$ donc $\cos(\alpha) = x$.
4. $\sin^2(\alpha) = 1 - x^2$ or $\sin(\alpha) \geqslant 0$ car $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\sin(\alpha) = \sqrt{1-x^2}$.
5. Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$. L'**initialisation** est conséquence des questions précédentes.

   Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose la propriété au rang n. On a alors

   $$u_{n+1} = \cos(2^n\alpha)^2 - \sin(2^n\alpha)^2 = \cos(2 \times 2^n\alpha) = \cos(2^{n+1}\alpha).$$

   De même,

   $$v_{n+1} = 2\cos(2^n\alpha)\sin(2^n\alpha) = \sin(2 \times 2^n\alpha) = \sin(2^{n+1}\alpha).$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par principe de récurrence.

Exercice 3 Soit f une fonction d'un ensemble E dans $\mathbf{R}$. Écrire avec des quantificateurs les affirmations suivantes.

1. f est constante égale à 1,
2. f prend la valeur 1 au moins une fois,
3. f prend deux valeurs au plus : 0 et 1.

Pour chacune, donner les négations.

Solution

1. $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) = 1$.
2. $\exists x \in \mathrm{E}, f(x) = 1$.
3. $\forall x \in \mathrm{E}, f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$.

Exercice 4 Soit $x \in \mathbf{R}$ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. On définit une suite (u_j) par $u_j = \sin\left(jx - \frac{x}{2}\right)$ pour tout $j \in \mathbf{N}$.

1. Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$u_{j+1} - u_j = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(jx).$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(jx).$$

Solution

1. Pour tout $j \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{j+1} - u_j &= \sin((j+1)x - \frac{x}{2}) - \sin((j+1)x - \frac{x}{2}) \\ &= \sin(jx + \frac{x}{2}) - \sin(jx - \frac{x}{2}) \\ &= \sin(jx)cos(\frac{x}{2}) + \cos(jx)\sin(\frac{x}{2}) - \left(\sin(jx)\cos(\frac{x}{2}) - \cos(jx)\sin(\frac{x}{2})\right) \\ &= 2\cos(jx)\sin(\frac{x}{2}). \end{aligned}$$

2. On somme la relation obtenue entre $j=0$ et $j=n+1$. Par télescopage, on obtient

$$u_{n+1}-u_0=\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{j=0}^{n}\cos(jx).$$

Donc

$$\sin\left((n+1)x-\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{j=0}^{n}\cos(jx)$$

donc

$$\sum_{j=0}^{n}\cos(jx)=\frac{\sin\left((n+1)x-\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de D_f dans $\mathbf{R}$. Déterminer l'expression de la bijection réciproque.

Solution

1. Soit $x\in\mathbf{R}$. f est définie en x si et seulement si $\frac{1-x}{1+x}>0$ c'est à dire si $x\in]-1,1[$ en réalisant un tableau de signe.
2. Soit $y\in\mathbf{R}$, montrons qu'il existe un unique $x\in]-1,1[$ tel que $f(x)=y$.

$$\begin{aligned}
y=f(x) &\iff \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=y\\
&\iff e^y=\frac{1-x}{1+x}\\
&\iff e^y+xe^y=1-x\\
&\iff x(e^y+1)=1-e^y\\
&\iff x=\frac{1-e^y}{1+e^y}.
\end{aligned}$$

x est bien unique. Synthèse il reste a vérifier que $x\in]-1,1[$: on a pour tout $y\in\mathbf{R}$:

$$\left|\frac{1-e^y}{1+e^y}\right|<\frac{1+e^y}{1+e^y}\text{ (par inégalité triangulaire avec deux nombres de signes différents) }=1.$$

Ainsi $x\in]-1,1[$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbf{N}$. On souhaite calculer

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k}.$$

On introduit pour cela

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}.$$

1. Calculer $S_n + (-1)^n \binom{2n}{n} + R_n$.
2. Montrer que $S_n = R_n$.
3. En déduire la valeur de S_n.

Solution

1.

$$\begin{aligned} S_n + (-1)^n \binom{2n}{n} + R_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} + (-1)^n \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \text{ par la relation de Chasles} \\ &= (1-1)^n \text{ par la formule du binôme de Newton} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. On réalise le changement d'indice $i = 2n - k \iff k = 2n - i$ dans la somme R_n.

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{2n-i} \binom{2n}{2n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n}{i} \text{ car} \binom{2n}{i} = \binom{2n}{2n-i} \\ &= S_n. \end{aligned}$$

3. La question 1 donne $2S_n = -(-1)^n \binom{2n}{n}$ donc

$$S_n = (-1)^{n+1} \frac{\binom{2n}{n}}{2}.$$

3. (PETIT) PROBLÈME.

Dans tout le problème, $I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

1. On définit sur I les fonctions f et g par

$$f(x) = \frac{1}{3}(2\sin(x) + \tan(x)) \text{ et } g(x) = \frac{3\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

a) Vérifier que f et g sont bien définies sur I.
b) Les fonctions f et g sont elles paires ? impaires ?
c) Factoriser le polynôme

$$\mathrm{P}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Indication : le résultat sera à mettre sous la forme $a(x - r_1)^2(x - r_2)$ pour des réels a, r_1, r_2 à déterminer.
d) On définit une fonction u par $u(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Justifier que u est dérivable sur I et que

$$\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) = \frac{\mathrm{P}(\cos(x))}{3\cos(x)^2}.$$

e) En déduire les variations de u sur I.
f) On définit une fonction v par $v(x) = x - g(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Trouver un polynôme $\mathrm{Q}(x)$ de degré 2 (c'est à dire de la forme $\mathrm{Q}(x) = ax^2 + bx + c$) tel que

$$\forall x \in \mathrm{I}, v'(x) = \frac{\mathrm{Q}(\cos(x))}{(2+\cos(x))^2}.$$

g) En déduire les variations de v sur I.
h) Montrer que :

$$\forall x \in \mathrm{I}, g(x) < x < f(x).$$

2. a) Calculer $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.
b) En déduire $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\tan(\frac{\pi}{12})$.
c) En utilisant la **question 1.h)**, en déduire un encadrement de π.

Solution

a) Les deux fonctions sont bien définies sur I car il est inclus dans le domaine de tangente. De plus $2+\cos(x)$ est toujours non nul donc il n'y a pas de problème pour g.
b) Les deux fonctions sont impaires (calcul facile).
c) 1 est racine évidente de P. On cherche à mettre P sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c).$$

On doit avoir

$$2x^3-3x^2+1 = ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c = ax^2+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On obtient le système

$$\begin{cases} 2 & = a \\ -3 & = b-a \\ 0 & = c-b \\ 1 = -c \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a & = 2 \\ b & = -3+a = -1 \\ 0 & = c-b = -1-(-1) = 0 \\ c = -1 \end{cases}.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(x) = (x-1)(2x^2-x-1).$$

Le trinôme du second degré $2x^2-x-1$ a pour discriminant $\Delta = 1+4\times 2 = 9 > 0$. Le trinôme a donc deux racines

$$r_1 = \frac{1+3}{4} = 1 \text{ et } r_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-1}{2}.$$

Alors $(2x^2-x-1) = a(x-r_1)(x-r_2) = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$. Dès lors

$$\mathrm{P}(x) = 2(x-1)(x-1)(x+\frac{1}{2}) = 2(x-1)^2(x+\frac{1}{2}).$$

d) u est bien dérivable sur I et est de la forme $u(x) = f(x)-x$. Donc $u'(x) = f'(x)-1$. Calculons $f'(x)$:

$$\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) = \frac{1}{3}\left(2\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)^2}\right) = \frac{2\cos(x)^3+1}{3\cos(x)^2}.$$

Alors

$$\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) = \frac{2\cos(x)^3+1}{3\cos(x)^2} - 1 = \frac{-3\cos(x)^2+2\cos(x)^3+1}{3\cos(x)^2} = \frac{\mathrm{P}(x)}{3\cos(x)^2}.$$

e) $u'(x)$ est du signe de $P(cos(x))$ donc du signe de $\cos(x)+1/2$. Sur I, $\cos(x) \geqslant 0$ donc $\cos(x)+1/2>0$. Ainsi u est strictement croissante sur I

f) v est dérivable sur I et pour tout $x \in$ I, $v'(x) = 1-g'(x)$. g est une fonction de la forme g_1/g_2 avec $g_1(x) = 3\sin(x)$ donc $g_1(x) = 3\cos(x)$ et $g_2(x) = 2+\cos(x)$ donc $g_2'(x) = -\sin(x)$. On a alors $g'(x) = \frac{g_1'(x)g_2(x)-g_2'(x)g_1(x)}{g_2(x)^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, g'(x) &= 3\frac{\cos(x)(2+\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{(2+\cos(x))^2}\\ &= 3\frac{2\cos(x)+\cos(x)^2+\sin(x)^2}{(2+\cos(x))^2}\\ &= 3\frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2} \text{ car } \cos^2+\sin^2=1.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathrm{I}, u'(x) &= 1-3\frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}\\ &= \frac{(2+\cos(x))^2-6\cos(x)-3}{(2+\cos(x))^2}\\ &= \frac{(4+4\cos(x)+\cos(x)^2-6\cos(x)-3}{(2+\cos(x))^2}\\ &= \frac{\cos(x)^2-2\cos(x)+1}{(2+\cos(x))^2}\\ &= \frac{(\cos(x)-1)^2}{(2+\cos(x))^2}.\end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu avec $Q(x) = x^2-2x+1 = (x-1)^2$.

g) Pour tout $x \in$ I,

$$v'(x) = (\cos(x)-1)^2/(2+\cos(x))^2 > 0.$$

Donc v est strictement croissante.

h) Comme u est strictement croissante, pour tout $x \in$ I, $u(x) > \lim_{x\to 0} u(x)$. Or cette limite vaut 0. Donc pour tout x, $u(x) > 0$, donc $f(x)-x > 0$. Donc $f(x) > x$.
De même, $v(x)$ est strictement supérieur à sa limite en 0, donc à 0. Donc pour tout x, $v(x) > 0$ soit $x-g(x) > 0$, soit $x > g(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in$ I,

$$g(x) < x < f(x).$$

a)

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - 2\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12}.$$

b) Par les formules d'addition,

$$\cos(\pi/12) = \cos(\pi/6 - \pi/4) = \cos(\pi/6)\cos(\pi/4) + \sin(\pi/6)\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

De même,

$$\sin(\pi/12) = \sin(\pi/6 - \pi/4) = \cos(\pi/6)\sin(\pi/4) - \sin(\pi/6)\cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Finalement

$$\tan(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/12)}{\cos(\pi/12)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

en utilisant la quantité conjuguée.

c) On applique l'inégalité avec $x = \frac{\pi}{2}$. On obtient

$$g(\pi/12) < \pi/12 < f(\pi/12)$$

donc

$$\frac{12}{3}(2\sin(\pi/12) + \tan(\pi/2)) < \pi < \times \frac{36\sin(\pi/12)}{2+\cos(\pi/12)}.$$

On remplace les valeurs des fonctions trigonométriques par ce que l'on a obtenu pour obtenir un encadrement.