DEVOIR SURVEILLÉ # 3

Date : 17 décembre 2025.

1. ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1 Soit $m \in \mathbf{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x-y-z & = -1 \\ 3x-y-z & = m \end{cases}.$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(x) - \cos(x)}{x^2+1}$$

2.

$$\lim \frac{n^4 + n!}{n! + n!^2}.$$

2. EXERCICE A

On définit a matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que A est inversible et donner son inverse.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = nA + (1-n)I_3.$$

On considère trois suites, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi que les matrices colonnes

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

telles que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

4. Calculer les 3 coefficients de la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer un réel ω tel que $F = \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $F = AF + B$.
6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_{n+1} - F = A(X_n - F)$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n - F = A^n (X_0 - F)$.
8. Conclure, à l'aide des résultats obtenus dans les deux parties de l'exercice, en exprimant le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de n.

3. EXERCICE B

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

1. a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.
   b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.
   c) Donner la valeur de u_1.
2. a) Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
   b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.
   c) Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
3. a) Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et n.
   b) En déduire que, pour tout réel x différent de 1 , on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

   c) Donner alors une expression sans symbole Σ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.
4. a) Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2 , on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim_{n\to+\infty} nu_n^n$.

c) En revenant à la définition de u_n, montrer, pour $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}.$$

d) Donner finalement la valeur de ℓ.

4. EXERCICE C

On considère qu'une population est divisée en deux classes d'âge : les enfants et les adultes. On définit, à tout instant $n \in \mathbf{N}$; la taille de la population est enfants notée u_n et celle des adultes notée v_n. On suppose que $u_0, v_0 > 0$ et que l'évolution est traduite par le système suivant (S) :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = \frac{2}{3}u_n + v_n \\ v_{n+1} & = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{cases}.$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I_2$. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.
2. On définit $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   a) Montrer P est inversible et donner une expression matricielle de P^{-1}.
   b) Calculer $P^{-1}AP$.
   c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.
   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n & 3 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.
3. On souhaite étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions du système (S). Pour cela, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n par $X_n = \binom{u_n}{v_n}$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le système (S), établir un lien entre X_{n+1}, X_n et la matrice A définie à la question 1.
   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.
   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, u_0 et v_0, puis une expression de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
   d) Que peut-on dire de l'évolution de chaque population au bout d'un temps très grand ? Y a-t-il extinction/survie/explosion de la population ?

5. EXERCICE D

Dans tout l'exercice, a est un réel supérieur à 1 et (u_n) est la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a^{u_n}.$$

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) = a^x - x.$$

1. Montrer que $u_1 \geqslant u_0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Dans cette question, on suppose $a \geqslant e$.
   a) Montrer que f est strictement croissante. Donner le tableau de variations de f.
   b) Montrer que f ne n'annule pas. En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Dans toute la suite du sujet on suppose que $1 < a < e$. Donner le tableau de variation de f. **On vérifiera que f admet un minimum en $x^* = -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$ et que $f(x^*) = \frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$.**
5. Dans cette question, on traite le cas $a = \sqrt{2}$.
   a) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
   b) En déduire le tableau de signe de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   c) Quel est le signe de $f(x^*)$?
   d) Montrer que (u_n) est majorée par 2.
   e) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Montrer que f s'annule si et seulement si $a \leqslant \exp\left(\frac{1}{e}\right)$.
7. Quelle est la limite de (u_n) si $a > \exp\left(\frac{1}{e}\right)$?
8. On se place dans le cas $a \leqslant \exp\left(\frac{1}{e}\right)$. Montrer que f s'annule une ou deux fois. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
9. On note ℓ le plus petit réel positif pour lequel f s'annule. Montrer que (u_n) est majorée par ℓ.
10. En déduire la limite de (u_n).