DEVOIR SURVEILLÉ # 3

Date : 17 décembre 2025.

1. ÉCHAUFFEMENT

Exercice 1 Soit $m \in \mathbf{R}$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x-y-z & = -1 \\ 3x-y-z & = m \end{cases}.$$

Exercice 2 Déterminer les limites suivantes :

1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\ln(x) - \cos(x)}{x^2+1}$$

2.

$$\lim \frac{n^4 + n!}{n! + n!^2}.$$

2. EXERCICE A

On définit a matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2A - I$.
2. Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Solution

On obtient $A(A - 2I_3) = -I_3$ donc A est inversible est $A^{-1} = I_3 - A$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = nA + (1-n)I_3.$$

Solution

On raisonne par récurrence sur n. Initialisation : c'est bien vrai car $A^0 = I_3$.
Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $A^n = nA + (1-n)I_3$. Dès lors

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n A \\
&= nA^2 + (1-n)A \\
&= n(2A - I_3) + (1-n)A \\
&= (2n+1-n)A - nI_3 \\
&= (n+1)A - nI_3
\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang suivant.

On considère trois suites, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi que les matrices colonnes

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

telles que

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et, pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B$$

4. Calculer les 3 coefficients de la matrice colonne $X_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$.

Solution

Il suffit de calculer

$$\begin{aligned}
X_1 &= AX_0 + B \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Déterminer un réel ω tel que $F = \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifie $F = AF + B$.

Solution

On calcule

$$\begin{aligned}
AF + B &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ \omega - 2 \\ 4\omega - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega - 1 \\ 4\omega + 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\omega = 0$.

6. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_{n+1} - F = A(X_n - F)$.

Solution

Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
A(X_n - F) &= AX_n - AF \\
&= X_{n+1} - B - (F - B) \\
&= X_{n+1} - F.
\end{aligned}$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}, X_n - F = A^n (X_0 - F)$.

Solution

Par récurrence.

8. Conclure, à l'aide des résultats obtenus dans les deux parties de l'exercice, en exprimant le terme général de chacune des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en fonction de n.

Solution

Soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
X_n &= A^n(X_0 - F) + F \\
&= [nA + (1-n)I_3](X_0 - F) + F \\
&= nA(X_0 - F) + (1-n)(X_0 - F) + F \\
&= n\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= n\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} + (1-n)\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4n+1 \\ 4n+2 \\ 16n+3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ceci nous donne les formules $u_n = -4n+1$, $v_n = 4n+2$, $w_n = 16n+3$.

3. EXERCICE B

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1], f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n$$

1. a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

Solution

f_n est polynomiale donc dérivable et pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1} > 0$$

donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

Solution

On calcule $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}$. De plus f_n est continue est strictement croissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ vers son intervalle image $[0,n]$. Ainsi, 1 admet un unique antécédent dans $[0,1]$.

c) Donner la valeur de u_1.

Solution

Il s'agit de résoudre l'équation $x = 1$ donc $u_1 = 1$.

2. a) Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

Solution

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^{n+1}.$$

b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.

Solution

$$f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + (n+1){u_n}^{n+1} = 1 + (n+1){u_n}^{n+1}.$$

Ainsi, $f_{n+1}(u_n) \geqslant 1$.

c) Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Solution

D'après la question précédente,

$$f_{n+1}(u_n) \geqslant f_{n+1}(u_{n+1})$$

et comme f_{n+1} est strictement croissante, $u_n \geqslant u_{n+1}$ donc (u_n) est décroissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

Solution

La suite est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3. a) Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et n.

Solution

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

b) En déduire que, pour tout réel x différent de 1 , on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

Solution

En dérivant la relation de la question précédente on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

c) Donner alors une expression sans symbole Σ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.

Solution

On déduit que pour tout $x \in [0,1]$,

$$f_n(x) = x\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = x\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

4. a) Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2 , on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

Solution

Il s'agit de résoudre l'équation $x+2x^2=1$ ce qui donne l'équation du second degré $2x^2+x-1$ de discriminant 9. Le trinôme a deux racines : $\frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$ et $\frac{-1-4}{4} = -1$. Ainsi $u_2 = \frac{1}{2}$ qui est la seule racine dans $[0,1]$. Par décroissance de (u_n) on obtient que pour tout $n \geqslant 2, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim_{n\to+\infty} nu_n^n$.

Solution

Pour tout $n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n^n \leqslant (\frac{1}{2})^n$ donc, par encadrement u_n^n tend vers 0. De même $0 \leqslant nu_n^n \leqslant n\frac{1}{2^n}$. Or $n\frac{1}{2^n}$ tend vers zéro par croissance comparée, donc nu_n^n tend vers zéro par encadrement.

c) En revenant à la définition de u_n, montrer, pour $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = nu_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}.$$

Solution

On évalue la relation obtenue en Q 3.c qui donne

$$1 = u_n\frac{nu_n^{n+1}-(n+1)u_n^n+1}{(1-u_n)^2}$$

donc

$$1-2u_n+u_n^2 = nu_n^{n+2}-(n+1)u_n^{n+1}+u_n$$

donc

$$1-3u_n+u_n^2 = nu_n^{n+2}-(n+1)u_n^{n+1}.$$

d) Donner finalement la valeur de ℓ.

Solution

On passe à la limite dans la relation obtenue, ce qui donne

$$\ell^2 - 3\ell + 1 = \ell^2 \times 0 - 0$$

donc

$$\ell^2 - 3\ell + 1 = 0.$$

On obtient un trinôme du second degré de discriminant 5. Ainsi $\ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Le résultat est $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ car c'est le seul compris dans $[0,1]$.

4. EXERCICE C

On considère qu'une population est divisée en deux classes d'âge : les enfants et les adultes. On définit, à tout instant $n \in \mathbf{N}$; la taille de la population est enfants notée u_n et celle des adultes notée v_n. On suppose que $u_0, v_0 > 0$ et que l'évolution est traduite par le système suivant (S) :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \begin{cases} u_{n+1} & = \frac{2}{3}u_n + v_n \\ v_{n+1} & = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{cases}.$$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - \frac{4}{3}A + \frac{1}{3}I_2$. En déduire que A est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.
2. On définit $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   a) Montrer P est inversible et donner une expression matricielle de P^{-1}.
   b) Calculer $P^{-1}AP$.

Solution

$P^{-1}AP = D$.

   c) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Solution

On raisonne par récurrence sur n. **Initialisation.** C'est vrai car $P^{-1}D^nP = I_2 =$

A^0. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que $A^n = PD^nP^{-1}$. Dès lors

$$\begin{aligned} A^{n+1}AA^n & \\ &= P^{-1}DPP^{-1}D^nP \\ &= P^{-1}D^{n+1}P. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie pour tout n.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$.

Solution

On calcule

$$A^n = P^{-1}D^nP = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. On souhaite étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions du système (S). Pour cela, on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le vecteur colonne X_n par $X_n = \binom{u_n}{v_n}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le système (S), établir un lien entre X_{n+1}, X_n et la matrice A définie à la question 1.

Solution

$X_{n+1} = AX_n$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0$.

Solution

Par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression de u_n en fonction de n, u_0 et v_0, puis une expression de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

Solution

On a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} & 9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n} & 3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)u_0 + \left(9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)v_0 \\ \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right)u_0 + \left(3+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)v_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ce qui donne des expressions pour u_n et v_n.

d) Que peut-on dire de l'évolution de chaque population au bout d'un temps très grand ? Y a-t-il extinction/survie/explosion de la population ?

Solution

En passant à la limite on obtient

$$\lim \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_0}{2} + \frac{3v_0}{2} \\ \frac{u_0}{6} + \frac{v_0}{2} \end{pmatrix}$$

Il y a stabilisation de la population.

5. EXERCICE D

Dans tout l'exercice, a est un réel supérieur à 1 et (u_n) est la suite définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = a^{u_n}.$$

On définit la fonction f sur $\mathbf{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) = a^x - x.$$

1. Montrer que $u_1 \geqslant u_0$.

Solution

$u_0 = 1$ donc $a_0^u = a \geqslant 1$ donc $u_1 \geqslant u_0$.

2. Montrer que (u_n) est croissante.

Solution

On montre par récurrence la propriété $\mathrm{P}(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$. **Initialisation.** La propriété est vraie au rang 0 d'après la Q1. **Hérédité.** Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose $u_{n+1} \geqslant u_n$ donc $\ln(a)u_{n+1} \geqslant \ln(a)u_n$ car $a \geqslant 1$ donc $e^{\ln(a)u_{n+1}} \geqslant e^{\ell n(a)u_n}$ soit $a^{u_{n+1}} \geqslant a^{u_n}$ donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.
La propriété est donc vraie pour tout n donc (u_n) est croissante.

3. Dans cette question, on suppose $a \geqslant e$.

   a) Montrer que f est strictement croissante. Donner le tableau de variations de f.

   Solution

   f est dérivable par composition et pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = \ln(a)a^x - 1 \geqslant \ln(e)a^x - 1 = a^x - 1 > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc f est strictement croissante. Ses limites sont 1 en 0 et $+\infty$ en ∞. En effet : $f(x) = a^x(1 - x/a^x)$ et x/a^x tend vers zéro par croissance comparée, alors que a^x tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que f ne n'annule pas. En déduire que (u_n) tend vers $+\infty$.

   Solution

   f est strictement croissante et vaut 1 en 0 donc elle ne s'annule pas. De plus (u_n) est croissante donc elle converge ou tend vers $+\infty$. On suppose par l'absurde qu'elle converge vers ℓ, on a alors, par passage à la limite, $e\ell\ell = a^\ell$ donc $f(\ell) = 0$ ce qui est absurde. Ainsi (u_n) ne converge pas donc elle diverge vers $+\infty$.

4. Dans toute la suite du sujet on suppose que $1 < a < e$. Donner le tableau de variation de f. **On vérifiera que f admet un minimum en $x^* = -\frac{\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$ et que $f(x^*) = \frac{1+\ln(\ln(a))}{\ln(a)}$.**

Solution

Il s'agit de résoudre l'inéquation

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff \ln(a)a^x - 1 \geqslant 0 \\ &\iff a^x \geqslant \frac{1}{\ln(a)} \\ &\iff \ln(a)x \geqslant \ln(\frac{1}{\ln(a)})\ln(\text{ car le logarithme est strictement croissant} \\ &\iff \ln(a)x \geqslant -\ln(\ln(a)) \qquad = x \geqslant \frac{-\ln(\ln(}{\ln(a)} \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variations suivant :
f admet bien un minimum en x^* et

$$f(x^*) = .$$

5. Dans cette question, on traite le cas $a = \sqrt{2}$.
   a) Calculer $f(2)$ et $f(4)$.

   Solution

   $f(2) = \sqrt{2}^2 - 2 = 2 - 2 = 0$ et $f(4) = \sqrt{2}^4 - 4 = 4 - 4 = 0$..

   b) En déduire le tableau de signe de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   c) Quel est le signe de $f(x^*)$?

   Solution

   $2 < x^* < 4$ donc $f(x^*) < 0$.

   d) Montrer que (u_n) est majorée par 2.

   Solution

   Par récurrence. Pour l'hérédité, si $u_n \leqslant 2$, $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n} \leqslant \sqrt{2}^2 = 2$.

   e) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

   Solution

   (u_n) est croissante et majorée par 2 donc elle converge vers une limite ℓ. En passant à limite dans la relation de récurrence, on obtient $f(\ell) = 0$ donc $\ell = 2$ ou $\ell = 4$. Comme u_n est majorée par 2, $\ell = 2$.

6. Montrer que f s'annule si et seulement si $a \leqslant \exp\left(\frac{1}{e}\right)$.
7. Quelle est la limite de (u_n) si $a > \exp\left(\frac{1}{e}\right)$?
8. On se place dans le cas $a \leqslant \exp\left(\frac{1}{e}\right)$. Montrer que f s'annule une ou deux fois. Donner l'allure de la courbe représentative de f.
9. On note ℓ le plus petit réel positif pour lequel f s'annule. Montrer que (u_n) est majorée par ℓ.

10. En déduire la limite de (u_n).