Corrigé - DS 4

1 Echauffement

Par la formume de transfert :

$$\begin{aligned}E(2^X) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (2p+1-p)^n \text{ par la formule du binôme} \\ &= (p+1)^n.\end{aligned}$$

De même, $E(4^X) = (3p+1)^n$.

Par la formule de Huygens-Koenig,

$$V(2^X) = E((2^X)^2) - E(2^X)^2 = E(4^X) - E(2^X)^2 = (3p+1)^n - (p+1)^{2n}.$$

2 JPP DES IPP

1. $$I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

   Pour I_1, on réalise une IPP avec $u'(x) = e^x, u(x) = e^x, v'(x) = -1, v(x) = 1 - x$. u et v sont bien de classe C^1.

   $$\begin{aligned}I_1 &= [(1-x)^n e^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \\ &= -1 + e - 1 \\ &= e - 2.\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}e^x}{(n+1)!} - \frac{(1-x)^n e^x}{n!} dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 e^x (1-x)^n \left((1-x) - (n+1)\right) dx \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 e^x (1-x)^n \left(-x - n\right) dx\end{aligned}$$

   qui est négatif car la fonction sous l'intégrale est négative. Donc I_n est décroissante.

3.
$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^1 \frac{e^x}{n!} \text{ car } 1-x \in [0,1] \\ &= \frac{e-1}{n!}. \end{aligned}$$

De plus, $I_n \geq 0$ car la fonction sous l'intégrale est positive. Par encadrement, on obtient que que I_n tend vers zéro.

4. On réalise une IPP sur I_n avec $u(x) = \frac{(1-x)^n}{n!}, u'(x) = -\frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}, v(x) = e^x, v'(x) = e^x$. u et v sont bien C^1. On obtient
$$\begin{aligned} I_n &= [\frac{(1-x)^n}{n!} e^x]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-1}e^x}{(n-1)!} dx \\ &= -\frac{1}{n!} + I_{n-1} \end{aligned}$$
d'où l'égalité voulue.

5. Pour tout k on a $I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k!}$. Donc en sommant entre 1 et n on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} I_{k-1} - I_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$
soit, par télescopage,
$$I_0 - I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$
Remarque. Ici, on peut aussi faire une démonstration par récurrence à partir de la question précédente.

6. On a $u_n = 1 + I_0 - I_n$ donc u_n tend vers $1 + I_0$ car I_n tend vers 0 donc u_n tend vers e.

3 Des urnes

1. $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$.
2. (a) Si les événements B_1 à B_{i-1} sont réalisés, il reste dans l'urne $n-i+1$ boules dont $n-i$ blanches. Donc la probabilité conditionnelle vaut $\frac{n-i}{n-i+1}$.

   (b) L'événement $[X = k]$ se réécrit
$$B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap \overline{B_k}.$$
   Ainsi par la formule des probabilités composées
$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\ldots P_{B_1\cap\ldots B_{k-1}}(\overline{B_k}) \\ &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \ldots \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n} \text{ par téléscopage .} \end{aligned}$$

(c) X suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Ainsi $E(X)=\frac{n+1}{2}$ et $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$.

3. (a) A chaque tirage, deux boules sont interdites (la noire, et la numéro 0), sauf au dernier où on tire la noire. Ainsi :

$$\begin{aligned} P([Y=0]\cap[X=k]) &= \frac{n-2}{n}\frac{n-3}{n-1}\cdots\frac{n-k}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1} \\ &= \frac{n-k}{n(n-1)} \text{ par téléscopage.} \end{aligned}$$

(b) Par la formule des probabilités totales (avec le SCE associé à X),

$$\begin{aligned} P(Y=0) &= \sum_{k=1}^{n} P([X=k]\cap[Y=0]) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n-k}{n(n-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i}{n(n-1)} \text{ en réalisant le changement d'indice } i=n-k \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(c) Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Son espérance est $\frac{1}{2}$ et sa variance $\frac{1}{4}$.

4 Diffusion d'une information

1. X compte le nombre de succès (la personne est intéressée par l'information) d'une succession de N épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi $X \hookrightarrow B(N,p)$. $E(X)=Np$. $V(X)=Np(1-p)$.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. $[X_n=0]\subset[X_{n+1}=0]$ car si personne à l'étape n ne trouve l'information intéressante, elle ne circulera plus à l'étape d'après. Ainsi $u_n\le u_{n+1}$. Comme (u_n) est croissante et majorée par 1 (c'est une probabilité !), elle converge.
3. (a) Pour que l'information cesse de circuler à l'étape $n+1$ en sachant qu'il y a k sources d'information à l'étape 1, il faut que l'information cesse de circuler depuis chaque source en n étapes. Pour chaque source, la probabilité est u_n. Par indépendance, $P_{X_1=k}(X_{n+1}=0)=u_n^k$.

   (b) C'est vrai car $X_1(\Omega)=\{0,\dots,N\}$.

(c) Avec le SCE précédent on obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \sum_{k=0}^{N} P(X_1 = k) P_{X_1=k}(X_{n+1} = 0) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} u_n^k \\
&= \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (pu_n)^k (1-p)^k \\
&= (pu_n + 1 - p)^N \text{ par la formule du binôme.}
\end{aligned}$$

4. (a) Soit $\ell = \lim u_n$. En passant à la limite dans la relation de récurrence on obtient $\ell = (1-p+p\ell)^2$. C'est une équation de degré 2. On vérifie que 1 et $(\frac{1-p}{p})^2$ sont solution donc c'est les seuls. Ce sont donc les deux limites possibles.

   (b) Si $p \leq \frac{1}{2}, 1-p \geq p$ donc $\frac{(1-p)^2}{p^2} \geq 1$. Comme $\ell \leq 1$, on obtient $\ell = 1$.

   (c) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{(1-p)^2}{p^2} < 1$, donc en passant à la limite, $\ell \leq \frac{(1-p)^2}{p^2} < 1$ donc $\ell = \frac{(1-p)^2}{p^2}$.

5 Suites et fonctions

Partie A.

1. Par définition, f_n est une primitive de $x \mapsto \frac{x^{2n}-1}{x+1}$, donc elle est dérivable et pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$ qui est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc f_n est C^1.
2. $f_n'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$.
3. (a) On note g la fonction de l'indication : comme g est dérivable, il existe $c \in [1, t^2]$ tel que

$$g(t^2) - g(1) = g'(c)(t^2 - 1) = nc^{n-1}(t^2 - 1) \geq n(t^2 - 1)$$

   car $c \geq 1$ d'où

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

   (b) On divise l'inégalité précédente par $t+1$ qui est positif pour obtenir

$$f_n'(t) \geq n\frac{t^2-1}{t+1} = n(t-1).$$

(c) On intègre l'inégalité précédente entre 1 et x qui donne $\int_1^x f_n'(t)dt \geq \int_1^x n(t-1)$ soit

$$f_n(x) - f_n(1) \geq n\frac{(t-1)^2}{2}$$

et donc

$$f_n(x) \geq f_n(1) + \frac{n}{2}(t-1)^2.$$

(d) Par comparaison, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.

4. $f_n(0) = 0$, donc d'après les variations de f_n, $f_n(1) < 0$.
5. D'après les variation de f_n, $f_n(x) = 0$ n'a pas de solutions sur $]0, 1]$. Sur $[1, +\infty[$, f_n est continue et strictement croissante, donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers son image $[f_n(1), +\infty[$. Comme 0 est dans cet intervalle, il admet exactement un antécédent et celui-ci est dans $]1, +\infty[$ (car $f_n(1) \neq 0$).

Partie B.

6. On calcule !

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) - f_n(x) &= \int_0^x \frac{t^{2n+2} - t^{2n}}{t+1} dt \\
&= \int_0^x t^{2n} \frac{t^2 - 1}{t+1} dt \\
&= \int_0^x t^{2n} \frac{t-1}{d} t \\
&= \int_0^x t^{2n+1} dt - \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&= x^{2n+1} \left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \right).
\end{aligned}$$

7. (a) si $x \geq \frac{2n+2}{2n+1}$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq x^{2n+1} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 0$$

donc $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

(b) Comme $x_n \geq \frac{2n+2}{2n+1}$, on a $f_{n+1}(x_n) \geq f_n(x_n) = 0$.

(c) On a donc $f_{n+1}(x_n) \geq f_{n+1}(x_{n+1})$ donc par stricte croissance de f_n sur $[1, +\infty[$, $x_n \geq x_{n+1}$ donc (x_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 1, x_n converge.