DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 4 mars 2026

A. EXERCICES

Exercice 1 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x)\}$. Montrer que F est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

Exercice 2 Montrer que

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 On définit une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ par

$$A = \begin{pmatrix}4 & -2\\3 & -3\end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^2 - x - 6.$$

   Montrer que $P(A) = 0_2$.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Expliquer pourquoi il existe des réels a_n et b_n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n = Q(x)P(x) + a_n x + b_n.$$

3. En évaluant cette égalité pour des valeurs de x bien choisies, déterminer a_n et b_n.
4. Justifier que $A^n = a_n A + b_n I_2$.
5. Calculer A^n.

Exercice 4 Déterminer une base de

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ y+z+t=0. \end{cases} \right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de E.

Exercice 5 On définit la suite (I_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\mathrm{I}_n = \int_1^e \ln(x)^n \, dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que (I_n) est décroissante puis qu'elle converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_{n+1} = e - (n+1)\mathrm{I}_n.$$

4. En déduire une fonction Python qui prend en entrée n et renvoie I_n.
5. Montrer I_n et $n\mathrm{I}_n$ convergent vers des limites à déterminer.
6. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n.$$

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)(u_n - \mathrm{I}_n)$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \mathrm{I}_n = (-1)^n n!(u_0 - \mathrm{I}_0).$$

8. Déterminer la limite éventuelle de (u_n) en fonction de la valeur de u_0.
9. L'appel de la fonction Python laisse croire que $\lim |\mathrm{I}_n| = +\infty$. Comment l'expliquez-vous ?

B. PYTHON

1. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un tableau numpy et un entier et renvoie True si l'entier est dans le tableau et False sinon.
2. Écrire une fonction qui prend en entrée un nombre positif x et renvoie le plus petit entier n tel que $n3^n > x$.

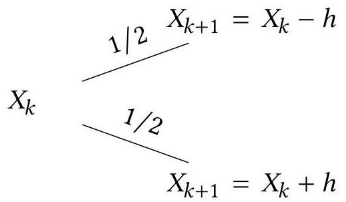
C. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^tM = M$ et antisymétrique si ${}^tM = -M$. S_n l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S_n est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$. On admet que A_n en est aussi un.
2. **Dans cette question,** $n = 3$. On note $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ un élément de $M_3(\mathbb{R})$.
   a) Montrer que
   $$M \in S_3 \iff \begin{cases} b & = d \\ c & = g \\ f & = h \end{cases}.$$
   b) En déduire une base de S_3 et donner sa dimension. On note cette base $(M_1, \dots, M_p)$.
   c) Montrer que
   $$M \in A_3 \iff \begin{cases} b & = -d \\ c & = -g \\ f & = -h \\ a = e = i & = 0 \end{cases}.$$
   d) En déduire une base de A_3 et donner sa dimension. On note cette base $(N_1, \dots, N_q)$.
   e) Montrer que $(M_1, \dots, M_p, N_1, \dots N_q)$ est une base de $M_3(\mathbb{R})$.
3. a) Montrer que
   $$M \in S_n \iff \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \text{ si } i \neq j \text{ alors } a_{i,j} = a_{j,i}.$$
   b) En déduire une base de S_n. Montrer que $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (qu'on notera p) On note cette base $(M_1, \dots, M_p)$.
   c) De la même façon, déterminer une base de A_n et montrer que $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$. (qu'on notera q) On note cette base $(N_1, \dots, N_q)$.
   d) Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $A \in S_n$ et $B \in A_n$ telles que $M = A + B$. (On pourra raisonner par analyse-synthèse).
   e) Déduire des questions précédentes que $(M_1, \dots, M_p, N_1, \dots N_q)$ est famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$.
   f) Montrer que $(M_1, \dots, M_p, N_1, \dots N_q)$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$. (Indication : que vaut $p + q$?).

D. MARCHE ALÉATOIRE

On considère une particule astreinte à se déplacer sur la droite réelle en effectuant une marche aléatoire de pas $\pm h$, avec $h > 0$ tous les Δt instants. Cette particule peut faire indifféremment un saut à gauche ou à droite avec une même probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose qu'à l'instant initial la particule est en $x = 0$. On note X_k la position de la particule au temps $k\Delta t$ c'est-à-dire après k sauts.



1. Donner l'ensemble des valeurs pouvant être prises par X_3, ainsi que sa loi de probabilité. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
2. Écrire une fonction Python qui prend entrée un entier n et renvoie une réalisation de X_n.
3. Justifier que l'espérance de X_k, pour $k \geq 1$, est nulle.
4. Soit Y_k la variable qui compte le nombre de saut à droite de la particule au temps $k\Delta t$. Quelle est la loi de Y_k ? Justifier.
5. Exprimer X_k en fonction de Y_k.
6. En déduire :
   (a) La variance de X_k, pour $k \geq 1$.
   (b) L'ensemble des valeurs pouvant être prises par X_k pour tout $k \geq 1$, ainsi que sa loi.

On suppose maintenant que cette particule est enfermée dans une boite de n cases de largeur h numérotées de 1 à n. Quand la particule est à gauche, sur la case 1 elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester sur place et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rebondir à droite et de se retrouver dans la case 2 . De manière symétrique, si elle est dans la dernière case (n) elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester dans la case n et une probabilité $\frac{1}{2}$ de se retrouver dans la case $n-1$. Dans les autres cas (quand elle est située entre les cases 2 et $n-1$), la particule se comporte comme dans la sous-partie précédente. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$. On dira qu'un vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ est le vecteur de probabilité de X si pour tout $i \in [1, n]$, $\mathrm{P}(\mathrm{X} = i) = p_i$. Cela nécessite en particulier que pour tout $i \in [1, n]$, $p_i \geq 0$ et que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On note, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\vec{p}_k$ le vecteur probabilités de X_k. Soit la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \dots & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}, \vec{p}_{k+1} = \mathrm{M}\vec{p}_k$.
8. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\vec{p}_k = \mathrm{M}^k \vec{p}_0.$$

On se place, jusqu'à la fin du sujet, dans le cas $n = 3$.

9. Que vaut alors la matrice M ? On fera particulièrement attention à la première et dernière ligne.
10. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer que $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3$ est non inversible si et seulement $\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{2}$, ou $\lambda = \frac{1}{2}$.
11. Soit $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On note D la matrice obtenue.

12. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}, \mathrm{M}^k = \mathrm{QD}^k\mathrm{Q}^{-1}$.
13. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{D}^k$.
14. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} \mathrm{M}^k$ puis $\lim_{k\to+\infty} \vec{p}_k$. Donner une interprétation.