DEVOIR SURVEILLÉ # 5

Date : 4 mars 2026

A. EXERCICES

Exercice 1 Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[x], \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x)\}$. Montrer que F est un espace vectoriel. En donner une base et la dimension.

Solution

On prouve que c'est un SEV de $\mathbb{R}_3[x]$.

- Par définition, $F \subset \mathbb{R}_3[x]$.
- F est non vide car le polynôme nul est dans F $(0 = 0)$.
- Soient $P, Q \in F^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $P + \lambda Q \in F$.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, (P+\lambda Q)(-x) &= P(-x) + \lambda Q(-x) \\ &= -P(x) - \lambda Q(x) \text{ car } P, Q \in F \\ &= -(P+\lambda Q)(x)\end{aligned}$$

donc $P + \lambda Q \in F$.

F est donc un SEV de $\mathbb{R}_3[x]$.

Cherchons une famille génératrice. Soit $P = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

$$\begin{aligned}P \in F &\iff \forall x \in \mathbb{R}, -ax^3 + bx^2 - cx + d = -ax^3 - bx^2 - cx - d \\ &= \begin{cases} b = 0 \\ d = 0 \end{cases} \quad \text{par identification des coefficients.}\end{aligned}$$

Une famille génératrice de F est donc (x^3, x) qui est libre car échelonnée en degré. Ainsi c'est une base et $\dim F = 2$.

Exercice 2 Montrer que

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution

On commence par montrer que la famille est libre. Soient λ, μ, γ des réels tels que

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

. Montrons que $\lambda=\mu=\gamma=0$. On a

$$\begin{pmatrix}\lambda+2\mu\\ \gamma\\ 2\lambda+3\mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{cases}0 & =\lambda+\mu\\ 0 & =\gamma\\ 0 & =2\lambda+3\mu\end{cases}$$

donc, en résolvant le système, $\lambda=\mu=\gamma=0$. La famille est donc libre.
De plus, elle est de cardinal 3 ce qui est la dimension de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, donc c'est une base.

Exercice 3 On définit une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ par

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

1. Soit P le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x)=x^2-x-6.$$

Montrer que $P(A)=0_2$.

Solution

Simple calcul.

2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Expliquer pourquoi il existe des réels a_n et b_n et un polynôme $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^n=Q(x)P(x)+a_n x+b_n.$$

Solution

On pose la division euclidienne de x^n par P. Ainsi $x^n = \mathrm{PQ}+\mathrm{R}$ pour des polynômes Q, R tels que $\deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{P} = 2$ donc R peut bien s'écrire $a_n x + b$.

3. En évaluant cette égalité pour des valeurs de x bien choisies, déterminer a_n et b_n.

Solution

Les racines de P sont -2 et 3. On évalue l'égalité en 2 pour obtenir $(-2)^n = -2a_n + b_n$ et en 3 pour obtenir $3^n = 3a_n + b_n$. La résolution du système permet d'obtenir $3^n - (-2)^n = 5a_n$ donc $a_n = \frac{3^n-(-2)^n}{5}$ et puis $b_n = \frac{2\times 3^n + (-2)^n}{5}$.

4. Justifier que $\mathrm{A}^n = a_n \mathrm{A} + b_n \mathrm{I}_2$.

Solution

On évalue l'égalité polynomiale en A qui donne

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{Q}(\mathrm{A}) + a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2 = a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2$$

car $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0_2$.

5. Calculer A^n.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= a_n\mathrm{A} + b_n\mathrm{I}_2 \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4(3^n-(-2)^n) + 2\times 3^n + (-2)^n & (-2)(3^n-(-2)^n) \\ 3(3^n-(-2)^n) & -3(3^n-(-2)^n) + 2\times 3^n + (-2)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6\times 3^n - 3\times(-2)^n & (-2)(3^n-(-2)^n) \\ 3(3^n-(-2)^n) & -3^n + 4(-2)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercice 4 Déterminer une base de

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ y+z+t = 0. \end{cases} \right\}.$$

Déterminer une base et la dimension de E.

Solution

Le système devient

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + z + t = 0. \end{cases}$$

Il est triangulaire, on fixe z, t comme paramètres.
Ainsi

$$\begin{aligned} E &= \{\begin{pmatrix} 0 \\ -z-t \\ z \\ t \end{pmatrix} (z,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (z,t) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de E. C'est une famille libre car elle est composée de deux vecteurs non proportionnels. C'est donc une base de E et $\dim E = 2$.

Exercice 5 On définit la suite (I_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_1^e \ln(x)^n \, dx.$$

1. Calculer I_0 et I_1.

Solution

$$I_0 = \int_1^e dx = e - 1$$

et

$$I_1 = \int_1^e \ln(x) dx = [x\ln(x) - x]_1^e = 1.$$

2. Montrer que (I_n) est décroissante puis qu'elle converge.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n = \int_1^e \ln(x)^n(\ln(x)-1)dx$$

or la fonction sous l'intégrale est négative car pour tout $x \in [1,e], \ln(x)^n \geqslant 0$ et $\ln(x)-1 \leqslant 0$. Ainsi par croissance de l'intégrale $\mathrm{I}_{n+1} - \mathrm{I}_n \leqslant 0$ donc (I_n) est décroissante. Comme ln est positive sur l'intervalle $[1,e]$, on obtient par positivité de l'intégrale que $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ pour tout n.
Ainsi (I_n) est décroissante et minorée donc elle converge.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{I}_{n+1} = e - (n+1)\mathrm{I}_n.$$

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$, on réalise une IPP sur I_{n+1}. On pose $u(x) = \ln(x)^{n+1}, u'(x) = \frac{n+1}{x}\ln(x)^n$, $v'(x) = 1, v(x) = x$ où u et v sont bien de classe C^1. L'intégration par parties donne donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+1} &= [\ln(x)^{n+1}x]_1^e - \int_1^e \frac{n+1}{x}\ln(x)^n x dx \\
&= \ln(e)^{n+1}e - \ln(1)^{n+1} - (n+1)\int_1^e \ln(x)^n dx \\
&= e - (n+1)\mathrm{I}_n
\end{aligned}$$

d'où la relation

$$\mathrm{I}_{n+1} = e - (n+1)\mathrm{I}_n.$$

4. En déduire une fonction Python qui prend en entrée n et renvoie I_n.

Solution

```python
def I(n):
    I = np.exp(1) - 1
    for k in range(n):
        I = np.exp(1) - (k+1)*I
    return I
```

5. Montrer I_n et $n\mathrm{I}_n$ convergent vers des limites à déterminer.

Solution

Par l'absurde, si I_n tend vers $\ell \neq 0$, $\mathrm{I}_{n+1} \sim -(n+1)\mathrm{I}_n$ donc $\ell \sim -n\ell$ ce qui est absurde. Ainsi I_n tend vers zéro, et donc par somme $(n+1)\mathrm{I}_n$ tend vers e donc $n\mathrm{I}_n = (n+1)\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n$ tend vers e.

6. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e - (n+1)u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \mathrm{I}_{n+1} = -(n+1)(u_n - \mathrm{I}_n)$.

Solution

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \mathrm{I}_{n+1} &= e - (n+1)u_n - (e - (n+1)\mathrm{I}_n) \\ &= -(n+1)u_n + (n+1)\mathrm{I}_n \\ &= -(n+1)(u_n - \mathrm{I}_n). \end{aligned}$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - \mathrm{I}_n = (-1)^n n!(u_0 - \mathrm{I}_0).$$

Solution

On raisonne par récurrence. L'initialisation est vraie car $(-1)^0 0! = 1$.
Hérédité. On suppose la propriété vraie au rang n, on a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \mathrm{I}_{n+1} &= -(n+1)(u_n - \mathrm{I}_n) \\ &= -(n+1)(-1)^n n!(u_0 - \mathrm{I}_0) \text{ par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)!(u_0 - \mathrm{I}_0) \text{ d'où l'hérédité.} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8. Déterminer la limite éventuelle de (u_n) en fonction de la valeur de u_0.

Solution

Si $u_0 = \mathrm{I}_0$, $u_n = \mathrm{I}_n$ donc la suite tend vers zéro. Sinon $u_n = \mathrm{I}_n + (-1)^n n!(u_0 - \mathrm{I}_0)$ donc u_n diverge en alternant entre $+\infty$ et $-\infty$. En particulier $\lim |u_n| = +\infty$.

9. L'appel de la fonction Python laisse croire que $\lim |\mathrm{I}_n| = +\infty$. Comment l'expliquez-vous ?

Solution

C'est parceque Python fait une erreur d'arrondi sur $u_0 = e^1$, et donc on est dans cadre de u_n dans le cas précédent avec $u_0 \neq I_0$ donc la limite est infinie.

B. PYTHON

1. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un tableau numpy et un entier et renvoie True si l'entier est dans le tableau et False sinon.

Solution

```
def test(T,x) :
    for k in range(len(T)):
        if x == T[k]:
            return True
    return False
```

ou

```
def test(T,x) :
    for y in range(len(T)):
        if x == y:
            return True
    return False
```

2. Écrire une fonction qui prend en entrée un nombre positif x et renvoie le plus petit entier n tel que $n3^n > x$.

Solution

```
def premier_n(x):
    n = 1
    while n*(3**n) <= x :
        n = n+1
    return n
```

C. MATRICES SYMÉTRIQUES ET ANTISYMÉTRIQUES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si ${}^t\mathrm{M} = \mathrm{M}$ et antisymétrique si ${}^t\mathrm{M} = -\mathrm{M}$. S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et A_n l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. On admet que A_n en est aussi un.

Solution

On montre que S_n vérifie les propriétés d'un sous espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\mathrm{S}_n \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ par définition.
- S_n est non vide car ${}^t0_n = 0_n$ donc $0_n \in \mathrm{S}_n$.
- Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{S}_n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, montrons que $\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} \in \mathrm{S}_n$.

$$ {}^t(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + \lambda\,{}^t\mathrm{B} = \mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} $$

  donc $\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B} \in \mathrm{S}_n$.

Ainsi S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

2. **Dans cette question,** $n = 3$**.** On note $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

   a) Montrer que

$$ \mathrm{M} \in \mathrm{S}_3 \iff \begin{cases} b & = d \\ c & = g \\ f & = h \end{cases} . $$

   b)

Solution

$$ \begin{aligned} \forall \mathrm{M} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{M} \in \mathrm{S}_3 &\iff \mathrm{M} = {}^t\mathrm{M} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} d = b \\ g = c \\ f = h \end{cases} \end{aligned} $$

c) En déduire une base de S_3 et donner sa dimension. On note cette base $(M_1, \dots, M_p)$.

Solution

S_3 est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$ défini par 3 équations. Il est donc de dimension 6. Soit $M \in S_3$, M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$S_n = \{aE_{1,1}+eE_{2,2}+iE_{3,3}+b(E_{1,2}+E_{2,1})+c(E_{1,3}+E_{3,1}+f(E_{2,3}+E_{3,2}),(a,e,i,b,c,f) \in \mathbb{R}^6\}.$$

Une base de S_n est donc

$$\left(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{1,2}+E_{2,1}, E_{1,3}+E_{3,1}, E_{2,3}+E_{3,2}\right).$$

Remarque C.1 — Ici, pas de problème à écrire explicitement les matrices. Ce sera juste plus difficile en dimension n.

Remarque C.2 — On peut aussi vérifier que la famille obtenue est libre !

d) Montrer que

$$M \in A_3 \iff \begin{cases} b & = -d \\ c & = -g \\ f & = -h \\ a = e = i & = 0 \end{cases}.$$

Solution

$$\begin{aligned}
\forall \mathrm{M} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}), \mathrm{M} \in \mathrm{A}_3 &\iff -\mathrm{M} = {}^t\mathrm{M}\\
&\iff \begin{pmatrix} -a & -b & -c\\ -d & -e & -f\\ -g & -h & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g\\ b & e & h\\ c & f & i \end{pmatrix}\\
&= \begin{cases} a = -a\\ e = -e\\ i = -i\\ d = -b\\ g = -c\\ f = -h \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a = 0\\ e = 0\\ i = 0\\ b = -d\\ g = -c\\ f = -h \end{cases}
\end{aligned}$$

e) En déduire une base de A_3 et donner sa dimension. On note cette base $(\mathrm{N}_1, \dots, \mathrm{N}_q)$.

Solution

Une base de A_3 est donnée par

$$\left(\mathrm{E}_{1,2} - \mathrm{E}_{2,1}, \mathrm{E}_{1,3} - \mathrm{E}_{3,1}, \mathrm{E}_{2,3} - \mathrm{E}_{3,2}\right).$$

f) Montrer que $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_p, \mathrm{N}_1, \dots \mathrm{N}_q)$ est une base de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$.

Solution

La famille obtenue est de cardinal $6+3=9$ qui est la dimension de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre ou génératrice pour prouver que c'est une base. On vérifie aisément que c'est une famille libre.

3. a) Montrer que

$$\mathrm{M} \in \mathrm{S}_n \iff \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ \text{si } i \neq j \text{ alors } a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Solution

M est symétrique si et seulement si $M = {}^tM$. Or pour tout (i,j), $({}^tM)_{i,j} = M_{j,i}$. Donc

$$\begin{aligned} M \in S_n &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}, M_{i,j} = M_{j,i} \\ &\iff \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = M_{j,i} \text{ car c'est automatiquement vrai si } i=j. \end{aligned}$$

b) En déduire une base de S_n. Montrer que $\dim S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (qu'on notera p) On note cette base $(M_1,\ldots,M_p)$.

Solution

Une base est donnée par

$$\left(\{E_{i,i}, i \in \{1,\ldots,n\}\} \cup \{E_{i,j}+E_{j,i}, j > i\}\right).$$

Dans cette famille, le premier ensemble a n éléments et le deuxième $\frac{n(n-1)}{2}$. En tout il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ ce qui donne la dimension de S_n.

c) De la même façon, déterminer une base de A_n et montrer que $\dim A_n = \frac{n(n-1)}{2}$. (qu'on notera q) On note cette base $(N_1,\ldots,N_q)$.

Solution

De la même façon, on obtient que qu'une base de A_n est

$$\left(E_{i,j} - E_{j,i},, j > i\right).$$

On obtient $\dim S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

d) Montrer que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, il existe $A \in S_n$ et $B \in A_n$ telles que $M = A + B$. (On pourra raisonner par analyse-synthèse).

Solution

Par analyse synthèse, on trouve que

$$M = \frac{{}^tM + M}{2} + \frac{-{}^tM + M}{2}$$

où $A = \frac{{}^tM+M}{2}$ est symétrique et $B = \frac{-{}^tM+M}{2}$ est antisymétrique.

e) Déduire des questions précédentes que $(M_1,\ldots,M_p,N_1,\ldots N_q)$ est famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Solution

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On la décompose sous la forme $A + B$ avec A symétrique et B antisymétrique. En utilisant les bases de S_n et A_n il existe des réels tels que

$$A = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i$$

et

$$B = \sum_{j=1}^{q} \mu_j N_j$$

donc

$$M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i + \sum_{j=1}^{q} \mu_j N_j$$

ce qui prouve que la famille est génératrice.

f) Montrer que $(M_1, \dots, M_p, N_1, \dots N_q)$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$. (Indication : que vaut $p + q$?).

Solution

$(M_1, \dots, M_p, N_1, \dots N_q)$ est une famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$ de cardinal

$$p + q = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

qui est la dimension de $M_n(\mathbb{R})$, donc c'est une base.

D. MARCHE ALÉATOIRE

On considère une particule astreinte à se déplacer sur la droite réelle en effectuant une marche aléatoire de pas $\pm h$, avec $h > 0$ tous les Δt instants. Cette particule peut faire indifféremment un saut à gauche ou à droite avec une même probabilité $\frac{1}{2}$. On suppose qu'à l'instant initial la particule est en $x = 0$. On note X_k la position de la particule au temps $k\Delta t$ c'est-à-dire après k sauts.

$$X_k \begin{cases} \xrightarrow{1/2} X_{k+1} = X_k - h \\ \xrightarrow{1/2} X_{k+1} = X_k + h \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble des valeurs pouvant être prises par X_3, ainsi que sa loi de probabilité. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

Solution

$X_3(\Omega) = \{-3h, -h, h, 3h\}$ et $P(X_3 = -3h) = P(X_3 = 3h) = \frac{1}{8}$, $P(X_3 = h) = P(X_3 = -h) = \frac{3}{8}$.

2. Écrire une fonction Python qui prend entrée un entier n et renvoie une réalisation de X_n.

Solution

```python
def X(k):
    X = 0
    for i in range(k):
        if rd.randint(2) ==0:
            X = X + h
        else:
            X = X - h
    return X
```

3. Justifier que l'espérance de X_k, pour $k \geq 1$, est nulle.

Solution

Pour tout $k \in n$, $X_{k+1} = X_k + hR$ où R suit une loi de Rademacher. Donc

$$E(X_{k+1}) = E(X_k) + hE(R) = E(X_k) \text{ car } E(R) = 0$$

. Ainsi $E(X_k) = E(X_0) = 0$.

4. Soit Y_k la variable qui compte le nombre de saut à droite de la particule au temps $k\Delta t$. Quelle est la loi de Y_k ? Justifier.

Solution

Y_k compte le nombre de succès (pas à droite) d'une succession d'épreuve de Bernoulli de indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ donc Y_k suit une loi binomiale de paramètres k et $\frac{1}{2}$.

5. Exprimer X_k en fonction de Y_k.

Solution

$$X_k = hY_k - h(n - Y_k)$$

car $k - Y_k$ est le nombre de pas vers la gauche. Ainsi $X_k = 2hY_k - kh$.

6. En déduire :

(a) La variance de X_k, pour $k \geq 1$.

Solution

$V(X_k) = (2h)^2 V(Y_k) = 4h^2 k \frac{1}{2}\frac{1}{2} = kh^2$.

(b) L'ensemble des valeurs pouvant être prises par X_k pour tout $k \geq 1$, ainsi que sa loi.

Solution

$$\begin{aligned} X_k(\Omega) &= \{2hy - hk, y \in Y_k(\Omega)\} \\ &= \{2hi - hk, i \in \{0, \ldots, k\}\}. \end{aligned}$$

et pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$P(X_k = 2hi - hk) = P(Y_k = i) = \binom{n}{i}\frac{1}{2^k}.$$

On suppose maintenant que cette particule est enfermée dans une boite de n cases de largeur h numérotées de 1 à n. Quand la particule est à gauche, sur la case 1 elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester sur place et une probabilité $\frac{1}{2}$ de rebondir à droite et de se retrouver dans la case 2 . De manière symétrique, si elle est dans la dernière case (n) elle a une probabilité $\frac{1}{2}$ de rester dans la case n et une probabilité $\frac{1}{2}$ de se retrouver dans la case $n-1$. Dans les autres cas (quand elle est située entre les cases 2 et $n-1$), la particule se comporte comme dans la sous-partie précédente. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On dira qu'un vecteur $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ est le vecteur de probabilité de X si pour tout $i \in [1,n]$, $P(X=i) = p_i$. Cela nécessite en particulier que pour tout $i \in [1,n]$, $p_i \geq 0$ et que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On note, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\vec{p}_k$ le vecteur probabilités de X_k. Soit la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

7. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\vec{p}_{k+1} = \mathrm{M}\vec{p}_k$.
8. En déduire que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\vec{p}_k = \mathrm{M}^k \vec{p}_0.$$

   On se place, jusqu'à la fin du sujet, dans le cas $n = 3$.
9. Que vaut alors la matrice M ? On fera particulièrement attention à la première et dernière ligne.
10. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$, montrer que $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_3$ est non inversible si et seulement $\lambda = 1, \lambda = -\frac{1}{2}$, ou $\lambda = \frac{1}{2}$.
11. Soit $\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que Q est inversible et que

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   On note D la matrice obtenue.
12. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{M}^k = \mathrm{QD}^k\mathrm{Q}^{-1}$.
13. Déterminer $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{D}^k$.
14. Déterminer $\lim_{k \to +\infty} \mathrm{M}^k$ puis $\lim_{k \to +\infty} \vec{p}_k$. Donner une interprétation.

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because LaTeX now knows how many pages to expect for this document.