DEVOIR SURVEILLÉ # 6

Date : 6 mai 2026

A. EXERCICE 1

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres et qu'à chaque tir, un archer a une probabilité $p \in]0,1[$ de toucher la cible. Les tirs se déroulent de la façon suivante : l'archer $\mathbf{A_1}$ tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle $\mathbf{X_1}$ la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur $\mathbf{A_1}$ pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de la cible. On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On notera $q = 1 - p$.

1. Reconnaître la loi de X_1. Donner, sans démonstration, son espérance et sa variance.
2. L'objectif de cette question est de montrer que, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} x^{n-k}$ converge vers $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
   a) Justifier que les séries convergent. On note $S_k(x)$ la somme.
   b) Calculer S_1.
   c) A l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que $S_{k+1}(x) = xS_{k+1}(x) + S_k(x)$.
   d) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(X_1=n)}(G = k)$.
4. Montrer que $P(G = 0) = \frac{q}{1+q}$.
5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(G = k) = q^{k-1}p^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}q^{2n-2k}$. (On pourra utiliser le système complet d'événement associé à X_1.) 5. Établir à l'aide de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(G = k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

   6. Montrer que G possède une espérance et que celle-ci vaut 1. Interpréter ce résultat.

B. EXERCICE 2

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Soient $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F = \{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in M_{4,1}(\mathbb{R}), \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}\}$. Montrer que $M_{4,1})(\mathbb{R}) = E + F$.
2. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une base de $F = \{P \in R_n[x] P(0) = P'(0) \text{ et } P^{(n)}(0) = P(0)\}$. Quelle est la dimension de F ? Déterminer un supplémentaire de F.

C. EXERCICE 3

1. Soit W une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction G_W, définie sur $[0,1]$, par

$$\forall t \in [0,1], \quad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W=n)t^n.$$

   a) Justifier que G_W est bien définie sur $[0,1]$.
   b) Montrer que G_W est croissante sur $[0,1]$.
   c) En déduire l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim_{t\to 1^-} G_W(t) = \ell$.
   d) Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n)t^n \leqslant G_W(t) \leqslant G_W(1)$$

   puis que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n) \leqslant \ell \leqslant G_W(1)$$

   e) En déduire que G_W est continue en 1 .
   f) Justifier que, pour tout $t \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} n\mathbf{P}(W=n)t^{n-1}$ est convergente. On admet que G_W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et que, pour tout $t \in [0,1[$:

$$G_W'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(W=n)t^{n-1}$$

   g) Montrer que G_W se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$ si et seulement si W admet un espérance, et que dans ce cas $G_W'(1) = E(W)$.
2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - x \leqslant \exp(-x)$.
   b) Montrer que, pour tous entiers m, n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m} \mathbf{P}(A_k).$$

c) Montrer que, pour tous entiers m, n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=n}^{m} \mathrm{A}_k\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^{m} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k)\right).$$

d) On suppose que la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$ diverge.
Montrer que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} \mathrm{A}_k\right) = 1.$$

D. PROBLÈME

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Partie I

1. Déterminer le domaine de définition de f.
   Dans les questions qui suivent, on note I le domaine de définition de f.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Dresser le tableau de variations de f sur I.
4. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en 0 .
   (b) En déduire une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 , ainsi que la position relative de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de ce point.
5. Représenter, dans un même repère orthonormé, l'allure de la courbe représentative de f et sa tangente au point d'abscisse 0 .

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x, on pose :

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

6. (a) Donner la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$. (b) Étudier la monotonie de la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} S_n(1) = +\infty$.
7. Montrer que, pour tout réel x de $]-1,1[$, la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$ converge absolument.
8. (a) Montrer que les suites $(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(S_n(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   On admet que $\lim_{n\to+\infty} S_n(-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.
   (c) En utilisant la monotonie des suites $(S_{2n}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1}(-1))_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\ln(2) + S_{2n}(-1)| \leqslant S_{2n}(-1) - S_{2n+1}(-1)$$

   (d) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $|\ln(2) + S_n(-1)| \leqslant \frac{1}{n}$.
9. Dans cette question uniquement, x est un réel strictement supérieur à 1 . (a) Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{x^k}{k}$. (b) En déduire la limite de la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour tout $x \in [-1,1[$, on pose $S(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.

Partie III

Dans toute cette partie, a désigne un réel fixe dans l'intervalle $]-1,1[$. Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'intégrale notée $R_n(a)$ définie par :

$$R_n(a) = \int_0^a \frac{(a-t)^n}{(1-t)^{n+1}} dt$$

On considère à nouveau la fonction f définie à la Partie I ainsi que la suite $(S_n(x))_{n\geqslant 1}$ et la fonction S définies à la Partie II.

10. (a) Déterminer en fonction de a les valeurs de $\int_0^a \frac{1}{1-t}\,dt$ et $\int_0^a \frac{1}{(1-t)^2}\,dt$.
    (b) Montrer que $f(a) = a + R_1(a)$.
    Indication : On pourra écrire $a - t = (a-1) + (1-t)$.
11. Montrer par intégration par parties que, pour tout entier naturel n non nul, $R_n(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}(a)$.
12. En utilisant les résultats des questions 10b et 11, montrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$f(a) = S_n(a) + R_n(a)$$

    Indication : On pourra procéder par récurrence.

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $a \in [0,1[$.
    (a) Montrer que pour tout réel t de $[0,a], 0 \leqslant \frac{a-t}{1-t} \leqslant a$.
    (b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant \mathrm{R}_n(a) \leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a}$.
    (c) En déduire que $f(a) = \mathrm{S}(a)$.
14. (a) En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

    (b) Écrire une fonction en langage Python, nommée Val, prenant en argument eps désignant le réel ε strictement positif, qui renvoie une valeur approchée de ln(2) à ε près.
    (c) Dans la figure suivante sont représentés les tracés des premiers termes des suites $\left(\mathrm{S}_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(-\mathrm{S}_n(-1)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Identifiez les suites dans cette figure.