DEVOIR SURVEILLÉ # 6

Date : 6 mai 2026

A. EXERCICE 1

On considère deux archers A_1 et A_2 qui tirent chacun sur une cible. On suppose de plus que les tirs des joueurs sont indépendants les uns des autres et qu'à chaque tir, un archer a une probabilité $p \in]0,1[$ de toucher la cible. Les tirs se déroulent de la façon suivante : l'archer $\mathbf{A_1}$ tire jusqu'à ce qu'il touche sa cible. On appelle $\mathbf{X_1}$ la variable aléatoire donnant le nombre de tirs effectués par le joueur $\mathbf{A_1}$ pour qu'il touche sa cible pour la première fois. Ensuite, si X_1 prend la valeur n, l'archer A_2 effectue n tirs en direction de la cible. On définit alors la variable aléatoire G égale au nombre de fois où la cible a été touchée par l'archer A_2. On notera $q = 1 - p$.

1. X_1 suit une loi géométrique de paramètre p. Son espérance est $\frac{1}{p}$ et sa variance $\frac{1-p}{p^2}$.
2. a) Le terme général de la série est $u_n = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} n-i}{k!} x^{n-k}$ donc $u_n \sim \frac{n^k}{k!} x^{n-k}$ donc $n^2 u_n$ tend vers zéro par croissance comparée. Ainsi $u_n = o(\frac{1}{n^2})$. Par négligeabilité devant une le terme général d'une Riemann convergente, la série S_k converge.
   b) On reconnaît une somme géométrique dérivée $\sum_{n\geqslant 1} n x^{n-1}$. Elle converge donc vers $\frac{1}{(1-x)^2}$.
   c) Question difficile!
   d) La relation précédente donne $S_{k+1}(x) = \frac{S_k(x)}{1-x}$. $S_k(x)$ est donc une suite géométrique et $S_k(x) = \frac{1}{(1-x)^{k-1}} S_1 = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$.
3. On compte le nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli de indépendantes de paramètres p. Ainsi

$$P_{X_1=n}(G=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

si $k \leqslant n$ et 0 sinon.

4. On utilise la formule des probabilités totales avec le SCE $(X_1 = n)_{n\geqslant 1}$.

$$\begin{aligned}
P(G=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1=n)P_{X_1=n}(G=k)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}pq^n\\
&= \frac{p}{q}\frac{q^2}{1-q^2} \text{ (somme géométrique de raison= } q^2\\
&= \frac{1-q}{q}\frac{q^2}{(1-q)(1+q)} \qquad\qquad = \frac{q}{1+q}.
\end{aligned}$$

5. De la même façon :

$$\begin{aligned}
P(G=k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1=n)P_{X_1=n}(G=k)\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-1}p\binom{n}{k}p^kq^{n-k} \text{ en retirant les cas impossibles}\\
&= q^{k-1}p^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}q^{2n-2k}.
\end{aligned}$$

La question 2 permet d'obtenir en utilisant $x=q^2$ et $n-k$ la valeur

$$P(G=k) = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}} = \left(\frac{q}{1+q}\right)^{k-1} \times \frac{1}{(1+q)^2}.$$

6. G admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} nP(X=n) = \sum_{n\geqslant 1} nP(X=n)$ converge absolument (ce qui revient à la convergence car $G\geqslant 0$.) Elle se réécrit :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{(1+q)^2}\left(\frac{q}{1+q}\right)^n - 1$$

C'est le cas car c'est une série géométrique dérivée de raison $\frac{1}{1+q} \in]-1,-1[$.
Ainsi G admet une espérance et L

$$\begin{aligned}
E(G) &= \sum_{n=0}^{+\infty} nP(G=n)\\
&= \frac{1}{(1+q)^2}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{q}{1+q}\right)^n - 1\\
&= \frac{1}{(1+q)^2}\frac{1}{(1-q/(1+q))^2}\\
&= \frac{1}{(1+q)^2}\frac{(1+q)^2}{(1+q-q)^2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

B. EXERCICE 3

1. Soit W une variable aléatoire discrète à valeurs entières. On introduit la fonction G_W, définie sur $[0,1]$, par

$$\forall t \in [0,1], \quad G_W(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(W=n)t^n.$$

   a) Soit $t \in [0,1]$, $G_w(t)$ est une série a à termes positifs majorée par $\sum P(W=n)$ qui converge. Par théorème de comparaison, la série qui définit $G_W(t)$ converge aussi.
   b) Soient $x, y \in [0,1]^2$ avec $x \leqslant y$. Pour tout n, $P(W=n)x^n \leqslant P(W=n)y^n$. Par croissance de la somme, on obtient $G_W(x) \leqslant G_W(y)$.
   c) G_W est croissante admet une limite à gauche en tout point de $[0,1]$, en particulier en 1.
   d)

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1[, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n)t^n \leqslant G_W(t) \leqslant G_W(1)$$

   vient pour l'inégalité de droite le croissance de G_W et pour celle de gauche du fait que G_W est une série à termes positifs, donc les sommes partielles sont inférieures à la somme totale. En passant à limite lorsque t tend vers 0^+ on obtient

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{m} \mathbf{P}(W=n) \leqslant \ell \leqslant G_W(1)$$

   e) En faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient $G_w(1) \leqslant \ell \leqslant G_w(1)$ donc $\ell = G_W(1)$ donc G_W est continue en 1.
   f) C'est une série à termes positifs et pour tout n, $nP(W=n)t^{n-1} \leqslant nt^{n-1}$ qui est le terme d'une série géométrique dérivée convergente (raison $t \in]-1,1[$. Ainsi, la série converge. On admet que G_W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1[$ et que, pour tout $t \in [0,1[$:

$$G'_W(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(W=n)t^{n-1}$$

   g) Erreur d'énoncé.
2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
   a) Par la formule de Taylor Lagrange : il existe t entre 0 et $-x$ tel que

$$e^{-x} = e^0 - x\exp'(0) + (-x)^2 \frac{\exp''(t)}{2}$$

   soit $e^{-x} = 1 - x + \frac{e^t}{2} \geqslant 1 - x$.
   b) Par récurrence sur $m \geqslant n$.

c) Par la question 2a.

1-exp$(-\sum_{k=n}^{m} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k) \leqslant \sum_{k=n^m} \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$
$\leqslant \mathrm{P}(\bigcup_{k=n^m}(\mathrm{A}_k)$ par la question précédente.

d) Si la série diverge, en passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$ on obtient

$$\mathrm{P}(\bigcup_{k=n}^{m} \mathrm{A}_k) \geqslant 1$$

(donc est égal à 1) par le théorème de limite monotone. Ainsi $\bigcup_{k=n}^{m} \mathrm{A}_k$ est un événément certain, et donc $\bigcap_{n\geqslant 1}\bigcup_{k=n}^{m} \mathrm{A}_k$ l'est aussi car c'est une intersection dénombrable d'événements certains.