DEVOIR SURVEILLÉ # 6

Devoir Type Ecricome

Date : 17 mai 2023

A. FORMULE DE STIRLING

A.1. Étude des intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Étudier les variations de la suite $(W_n)_{n \geqslant 0}$ -
3. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}$$

4. Déduire des questions précédentes que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} W_{n+1}$, puis que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

A.2. Démonstration de la formule de Stirling

Pour tout, entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{e^n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 .
   b) En déduire que : $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$.
3. a) Déterminer la nature de la série de terme général $(\ln\ u_{n+1} - \ln u_n)$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ.
4. λ l'aide des résultats de la partie I, déterminer la valeur de ℓ.

5. Démontrer alors la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

B. UNE SUITE D'INTÉGRALES

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$ converge. On note alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t$$

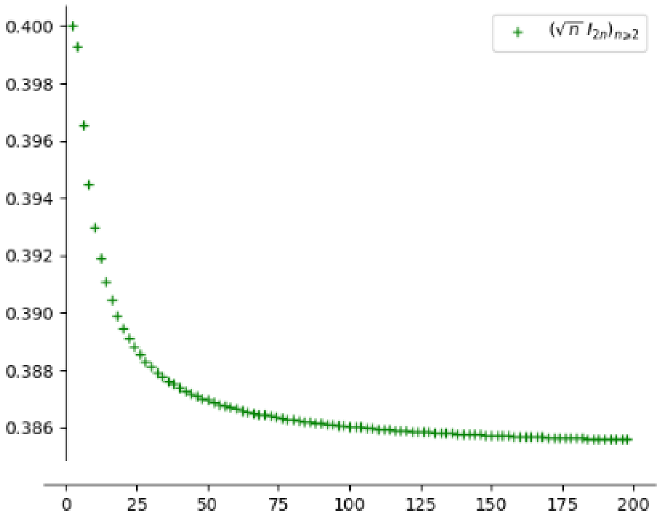
2. a) Calculer I_0.
   b) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
      i. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout réel A strictement positif :

$$\int_0^{\mathrm{A}} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t = -e^{-\mathrm{A}}\sin^{n-1}(\mathrm{A})(\sin(\mathrm{A})+n\cos(\mathrm{A})) \\ -n\int_0^{\mathrm{A}} e^{-t}\sin^n(t)\mathrm{d}t + n(n-1)\int_0^{\mathrm{A}} e^{-t}\cos^2(t)\sin^{n-2}(t)\mathrm{d}t$$

      ii. En déduire que $\mathrm{I}_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1}\mathrm{I}_{n-2}$.
3. a) Compléter la fonction Python suivante pour que, prenant en argument un entier naturel n, elle calcule et renvoie la valeur de I_{2n}.

```
def calcul ( n ):
        I =.........
        for k in range (1 , n +1):
                I = I * ...........
        return ..........
```

   b) On a représenté ci-dessous la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_{2n})_{n\geqslant 1}$ ‘a l'aide du programme Python précédent Que peut-on conjecturer pour un équivalent deI_{2n} lorsque n tend vers $+\infty$?



4. Soit n un entier naturel.
   a) Justifier l'égalité :

$$\int_0^{(\mathrm{N}+1)\pi} e^{-t} \sin^n(\ell)\mathrm{d}t = \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \left((-1)^n e^{-\pi}\right)^k\right) \int_0^{\pi} e^{-t} \sin^n(t)\mathrm{d}\ell$$

   b) En déduire que :

$$\mathrm{I}_n = \frac{1}{1-(-1)^n e^{-\pi}} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin^n(t)\mathrm{d}t$$

   c) Montrer que : $\mathrm{I}_n > 0$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $u_n = -\ln\left(\sqrt{n}\mathrm{I}_{2n}\right)$.
   a) Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \ln\left(\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right)$.
   b) Montrer, en utilisant la relation obtenue à la question 2 , que

$$u_n - u_{n-1} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{8n^2}.$$

   c) En déduire la nature de la série de terme général $u_n - u_{n-1}$, puis la convergence de la suite $(u_n)_{n\subset\mathbf{N}^*}$.
   d) Établir l'existence d'une constante strictement positive K telle que $\mathrm{I}_{2n}{}_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{n}}$.
6. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$: $\mathrm{J}_n = \int_0^{\pi} e^{-t} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.
   a) Déterminer un équivalent de J_{2n} en $+\infty$ faisant intervenir K.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, \mathrm{J}_{2n+2} \leqslant \mathrm{J}_{2n+1} \leqslant \mathrm{J}_{2n}$.
   c) En déduire un équivalent de J_{2n+1} puis de I_{2n+1} faisant intervenir K.
7. Les suites $(\mathrm{I}_n)_{n\subset\mathbf{N}^*}$ et $\left(\sqrt{n}\mathrm{I}_n\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

C. UN PROBLÈME DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

Pour tous entiers naturels a et b non nuls, et pour tout entier naturel r, on considère l'expérience aléatoire ci-dessous. Un urne contient initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue dans cette urne une infinité de tirages d'une boule, en procédant de la façon suivante : après chaque tirage, on remet la boule piochée dans l'urne et on rajoute systématiquement r boules blanches avant de procéder au tirage suivant. On note dans tout le problème X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule noire si on obtient au moins une boule noire dans l'expérience, et qui prend la valeur 0 si on n'obtient jamais de boule noire.

C.1. Premiers calculs

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : & Lors des n premiers tirages, on n'obtient que des boules blanches. $

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+kr}{a+b+kr}$.
2. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\ln\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$.
3. Étudier la nature de la série $\sum_{k\geqslant 0} \ln\left(1+\frac{b}{a+kr}\right)$, puis calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right)$.
4. Démontrer alors soigneusement que $\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=0$. Dans toute la suite du problème, on traduira ce résultat en supposant que $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}^*$
5. Écrire une fonction Python qui prend en entrée les entiers a, b et r, simule les tirages dans l'urne jusqu'à l'obtention de la première boule noire et renvoie la valeur de X obtenue.
6. Écrire alors une fonction Python qui en prend en entrée les entiers a, b et r, et une valeur de N, qui simule N réalisations de la variable aléatoire X et renvoie la moyenne des résultats obtenus.
7. On suppose dans cette question que $r = 0$. Donner la loi de X.
8. On suppose dans cette question que $a = b = r = 1$.
   a) Donner la loi de X.
   b) Démontrer que X n'admet pas d'espérance.

C.2. Étude du cas $r = 1$

Dans cette partie, on pose $r = 1$ et on suppose que b est supérieur ou égal à 2.

1. On suppose de plus que $a = 1$.

a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{b\cdot b!}{n(n+1)\cdots(n+b)} = \frac{b\cdot(n-1)!\cdot b!}{(n+b)!}$$

b) On note (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ v_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+b-1)} = \frac{n!}{(n+b-1)!}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\mathrm{P}(\mathrm{X}=n) = \frac{b\cdot b!}{b-1}\left(v_n - v_{n+1}\right)$.

c) En déduire que X admet une espérance, et que : $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \frac{b}{b-1}$.

On admettra que pour tout entier naturel a non nul, X admet une espérance.

Attention

Cette question n'est pas à traiter en DS mais figure dans le sujet initial : elle n'est faisable qu'en deuxième année. Elle est laissée ici pour vous donner une idée de la longueur des exercices.

2. Le réel a n'est plus supposé être égal à 1 mais seulement supérieur ou égal à 1 . On notera alors et uniquement dans cette question X_a la variable aléatoire X. Soit B_1 l'événement : « On obtient une boule blanche au premier tirage .
   a) Montrer que : $\forall a \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_a \mid \mathrm{B}_1\right) = 1 + \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{a+1}\right)$.
   b) Déterminer $\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_a \mid \overline{\mathrm{B}_1}\right)$.
   c) Démontrer que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_a\right) = 1 + \frac{a}{a+b}\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_{a+1}\right)$$

   puis que :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \mathrm{E}\left(\mathrm{X}_a\right) = \frac{a+b-1}{b-1}$$

C.3. Existence d'une espérance

On revient au cas général où a, b et r sont des entiers naturels non nuls et on suppose cette fois que r est non nul. On rappelle le résultat démontré dans la première partie :

$$\forall n \geqslant 1, -\ln\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{b}{a+kr}\right)$$

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = -\ln\left(\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right)\right) - \frac{b}{r}\ln(n)$.

1. Démontrer que la série de terme général $\left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge.
2. En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ converge vers un réel ℓ.
3. Démontrer que $\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_n\right)$ est équivalent à $e^{-\ell}\cdot\frac{1}{n^{\frac{b}{r}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $n\mathrm{P}(\mathrm{X}=n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b}{r}\mathrm{P}\left(\mathrm{A}_{n-1}\right)$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire X admette une espérance.