

CHAPITRE 28

Applications linéaires : interprétation matricielle.

Dans tout le chapitre, E , F , et G sont des espaces vectoriels **de dimension finie**.

1. INTRODUCTION : MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_m)$ une famille de vecteurs. On décompose chacun des vecteurs comme

$$v_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} e_i.$$

On construit alors la matrice $(m_{i,j})_{i,j} \in M_{n,m}(\mathbf{R})$. On a la propriété suivante :

Proposition 1

Soient $(C_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ les vecteurs colonnes de M , c'est à dire que

$$C_j = \begin{pmatrix} m_{1,j} \\ \vdots \\ m_{n,j} \end{pmatrix}$$

On a :

1. $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si les vecteurs C_j forment une base de $M_{n,1}(\mathbf{R})$. C'est aussi équivalent à l'inversibilité de M .
2. $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si les vecteurs C_i forment une famille libre $M_{n,1}(\mathbf{R})$.
3. $\mathcal{F}$ est génératrice si et seulement si les vecteurs C_i forment une famille génératrice de $M_{n,1}(\mathbf{R})$.
4. Plus généralement, le rang de la famille $(C_1, \dots, C_m)$ est le rang de $\mathcal{F}$.

Exemple 1 — Avec cette méthode. Montrer que la famille $(x^2 + 2x + 1, x^2 - 2x + 1, x + 1)$ est une base de $\mathbf{R}_2[x]$

Remarque 1.1 — Nous reprendrons ce résultat après avoir étudié un peu plus le lien application linéaires - matrices.

2. MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

2.1. Lien matrices / applications linéaires

Définition 1 | Matrice d'une application linéaire dans une base

Soient $B_E = (e_1, \dots, e_n)$ et $B_F = (f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de E et F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de f dans la base B_E vers la base B_F est la matrice $\text{Mat}_{B_F, B_E} f \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [\text{Mat}_{B_F, B_E} f]_{i,j} = m_{i,j}$$

où $f(e_j) = \sum_{i=1}^p m_{i,j} f_i$.



Attention

On retiendra que le nombre de lignes est la dimension de **l'espace d'arrivée**, et que le nombre de colonnes est la dimension de **l'espace de départ**.



Méthode (Calculer une matrice représentant un endomorphisme)

Pour calculer $[\text{Mat}_{B_F, B_E} f]$.

1. Pour chaque vecteur e_j de la base B_E , on calcule $f(e_j)$.
2. On trouve la décomposition de $f(e_j)$ dans la base $B_F = (f_1, \dots, f_p)$ c'est à dire qu'on trouve des $(\lambda_{i,j})$ tels que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_{i,j} f_i.$$

3. La matrice M est alors $M = (\lambda_{i,j})$.

Exemple 2 — Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (4x + 2y, x - y).$$

Déterminer la matrice de f si on a choisi la base canonique au départ et à l'arrivée.

Exemple 3 — La matrice de Id_E où on a choisi la même base au départ et à l'arrivée est toujours I_n .

Exemple 4 — Trouver la matrice de l'application linéaire $f : P \in \mathbf{R}_3[x] \mapsto P' \in \mathbf{R}_3[x]$ en prenant la base canonique au départ et à l'arrivée. Quelle est la matrice de $f_n : P \in \mathbf{R}_n[x] \mapsto P' \in \mathbf{R}_{n-1}[x]$.

Proposition 2 | Lien matrices - applications linéaires

Soient n et p des entiers strictement positifs et $M \in M_{p,n}(\mathbf{R})$. Alors la matrice de $u : X \in M_{n,1}(\mathbf{R}) \mapsto MX \in M_{p,1}(\mathbf{R})$ écrite dans les bases canoniques est la matrice M .

Théorème 1

On suppose que $\dim E = n$ et $\dim F = p$

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \text{Mat}_{B_F, B_E} f$$

est un isomorphisme linéaire entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $M_{p,n}(\mathbf{R})$. En particulier :

1.

$$\text{Mat}_{B_F, B_E} 0_{\mathcal{L}(E, F)} = 0_{p,n}.$$

2.

$$\text{Mat}_{B_F, B_E} f = \text{Mat}_{B_F, B_E} g \iff f = g.$$

3.

$$\text{Mat}_{B_F, B_E} (f + \lambda g) = \text{Mat}_{B_F, B_E} f + \lambda \text{Mat}_{B_F, B_E} g.$$

Cela implique aussi que

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

2.2. Calcul à l'aide des matrices

Définition 2 | Noyau et image d'une matrice

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle :

1. **Le noyau de la matrice**, noté $\text{Ker } M$, l'espace vectoriel défini par

$$\text{Ker } M = \{X \in M_{p,1}(\mathbf{R}), MX = 0_{M_{n,1}(\mathbf{R})}\}.$$

2. **L'image de la matrice**, noté $\text{Im } M$, l'espace vectoriel défini par

$$\text{Im } M = \{MX, X \in M_{p,1}(\mathbf{R})\} = \{Y \in M_{n,1}(\mathbf{R}), \exists X \in M_{p,1}(\mathbf{R}), MX = Y\}.$$

Remarque 2.1 — L'utilisation des mots noyau et image est légitime car, tel qu'il sont définis, si on note $u \in \mathcal{L}(M_{n,1}(\mathbf{R}), M_{p,1}(\mathbf{R}))$ canoniquement associée à M (c'est dire définie par $u(X) = MX$). Alors $\text{Ker } u = \text{Ker } M$ et $\text{Im } u = \text{Im } M$. En effet, par exemple pour le noyau, on a

$$X \in \text{Ker } u \iff u(X) = 0_{M_{p,1}(\mathbf{R})} \iff MX = 0_{M_{p,1}(\mathbf{R})} \iff X \in \text{Ker } M.$$

Méthode (Calcul de l'image d'un vecteur à l'aide d'une matrice)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $x \in E$. Pour déterminer $f(x)$ on peut :

1. Déterminer $[\text{Mat}_{B_F, B_E} f]$.
2. Écrire x dans la base B_E . On le note $X = \text{Mat}_{B_E} x$.
3. On calcule MX : il vaut $\text{Mat}_{B_F} f(x)$.
4. On obtient $f(x) = \sum_{i=1}^n [MX]_i f_i$.

Méthode (Calcul du noyau et de l'image à l'aide de bases)

Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire f à l'aide d'une base : on écrit la matrice associée à l'aide des bases (c'est à dire $[\text{Mat } f]_{B_E, B_F}$), on détermine son noyau dans l'espace de matrices colonnes associées, puis on retraduit dans les espaces.

Exemple 5 — Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbf{R}_3[x]$ défini par $f(P) = P'$. On le fera de deux façons différentes : avec et sans la représentation matricielle.

Proposition 3 | Matrice d'une forme linéaire

Soit f une forme linéaire sur un espace vectoriel dont une base est $B = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice de la forme linéaire f est le vecteur ligne

$$[\text{Mat}_B f] = (\cdot f(e_1), \dots, \cdot f(e_n) \cdot).$$

Remarque 2.2 — Cela sous entend qu'on a pris (1) comme base dans l'espace d'arrivée qui est $\mathbf{R}$.

Exemple 6 — Déterminer le vecteur ligne qui représente formes coordonnées $\mathbf{R}^n$ muni de sa base canonique.

2.3. Changement de bases

Soient B et B' deux bases d'un même espace vectoriel de dimension finie E . On se souvient qu'elles sont nécessairement de même cardinal $n = \dim E$. Mais comment passer d'une base à l'autre.

Définition 3 | Matrice de changement de base

On appelle la matrice de la base $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ ou la matrice de changement de base B' vers la base B la matrice $P_{B,B'} \in M_n(\mathbf{R})$ dont la colonne de rang j contient la matrice colonne qui représente les coordonnées de e'_j dans la base B . C'est à dire que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$e'_j = \sum_{i=1}^n P_{i,j} e_i$$

où $P = P_{B,B'}$.

Remarque 2.3 — La matrice de passage $P_{B,B'}$ est la matrice de l'application identité écrite dans la base B' vers la base B .

Proposition 4

Si B, B', B'' sont trois bases de E , $P_{B,B''} = P_{B,B'} P_{B',B''}$.

Proposition 5

Une matrice de passage est inversible et $(P_{B,B'})^{-1} = P_{B',B}$.

Proposition 6 | Changement de coordonnées

Soit $x \in E$, si X_B est le vecteur des coordonnées de x dans la base B , alors $X_{B'} = P_{B',B} X_B$ est le vecteur des coordonnées de x dans la base B' .

2.4. Opérations sur les matrices

Théorème 2 | Lien avec la composition

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors B_E, B_F et B_G sont des bases respectives de E, F et G on a

$$[\text{Mat } v \circ u]_{B_G, B_E} = ([\text{Mat } v]_{B_G, B_F}) \times ([\text{Mat } u]_{B_F, B_E}).$$

Corollaire 1

Un endomorphisme en dimension finie est un projecteur si et seulement si il est représenté par une matrice A vérifiant $A^2 = A$ et ce dans n'importe quelle base.

Corollaire 2

Une application linéaire est inversible si et seulement si elle est représentée par une matrice inversible (et ce dans n'importe quelle base).

Remarque 2.4 — La majorité des propriétés des applications linéaires correspondent à des propriétés matricielles. On peut encore citer :

1. la nilpotence revient à être représenté par une matrice A telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0_n \dots$
2. le fait d'être une homothétie revient à être représenté par une matrice λI_n dans n'importe quelle base

Théorème 3

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et B_E, B'_E deux bases de E , ainsi que B_F, B'_F deux bases de F , alors

$$[\text{Mat}_{B_F, B_E} f] = P_{B_F, B'_F} [\text{Mat}_{B'_F, B'_E} f] P_{B'_E, B_E}.$$

2.5. Rang d'une matrice

Définition 4 | Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice est la dimension de $\text{Im } f$. Avec l'étude précédente, on sait aussi que c'est le nombre de lignes non nulles de la matrice obtenus en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice.

Théorème 4

Soit f une application linéaire de E dans F et M la matrice de f dans des bases données. Alors $\text{rg } f = \text{rg } M$.

Théorème 5 | Formule du rang pour les matrices

Soit $M \in M_{n,p}(\mathbf{R})$, on a

$$p = \text{rg } M + \dim \text{Ker } M.$$

Remarque 2.5 — Le choix de n ou p dans cette formule est un excellent moyen de simuler une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ à partir de copies d'étudiants. Pour ne pas vous tromper, souvenez vous que c'est **la dimension de l'espace de départ**. Et très souvent, on aura $n = p$ dans les exercices.

Méthode (Déterminer le rang d'une application linéaire à l'aide des matrices)



1. On écrit la matrice de l'application linéaire dans certaines bases.
2. On utilise le pivot de Gauss pour déterminer le rang.

Proposition 7 | Composition par un isomorphisme - matrice inversible

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications linéaires.

1. Si u est un isomorphisme alors $\text{rg } v \circ u = \text{rg } u$.
2. Si v est un isomorphisme alors $\text{rg } v \circ u = \text{rg } v$.

Ainsi, soient A et B deux matrices telles que AB existe.

1. Si A est inversible alors $\text{rg } AB = \text{rg } B$.
2. Si B est inversible alors $\text{rg } AB = \text{rg } A$.

3. LE CAS DES ENDOMORPHISMES ET MATRICES CARRÉES

**Notation**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, la matrice de l'endomorphisme f dans la base B se note $\text{Mat}_B f$.

Définition 5

Soient M, N des matrices dans $M_n \mathbf{R}$, on dit qu'elles sont **semblables** s'il existe $P \in M_n(\mathbf{R})$ inversible telle que $M = P^{-1}NP$.

Théorème 6

Deux matrices sont semblables si et seulement si elle représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Auquel cas on a, avec les notations précédentes, $P = P_{B,B'}$ (si M représente f dans la base B et N dans la base B').

Remarque 3.1 — On déduit de tout ce qui précède que deux matrices semblables

ont le même rang.

Cette analogie endomorphisme - matrices carrées, ainsi que tout le travail qui précède permet d'écrire la formule du binôme de Newton.

Théorème 7

[Formule du binôme de Newton pour les matrices] Si A et B sont deux matrices qui **commutent**, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Exemple 7 — Calculer $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

Le résultat suivant a aussi déjà été évoqué dans un cadre plus général.

Théorème 8

Soit f une endomorphisme de E un espace de dimension finie. On a l'équivalence

1. f est un automorphisme,
2. f est représenté par une matrice inversible dans une base donnée,
3. f est représenté par une matrice inversible dans toute base.

Remarque 3.2 — On se servira surtout du sens (1) vers (2).

Exemple 8 — Montrer que $u : P \in \mathbf{R}_n[x] \mapsto P(x+1)$ est inversible. Déterminer l'inverse de la matrice de u dans la base canonique.

On revient, pour conclure, sur une dernière partie déjà évoquée.

Définition 6 | Polynôme annulateur de matrice

On dit qu'un polynôme P annule une matrice carrée $A \in M_n(\mathbf{R})$ si et seulement si $P(A) = 0_n$.

Avec tout ce qui a été dit précédemment, il est clair que P annule A si et seulement si P annule tout endomorphisme représenté par cette matrice dans une certaine base. De même, si P annule un endomorphisme, il annulera toute matrice qui le représente.

Cette analogie servira dans les exercices à

1. Calculer des inverses de matrices, des isomorphismes réciproques (cela peut marcher dans les deux sens),
2. Calculer des puissances d'endomorphismes et de matrices par division euclidienne notamment.