

TD 30-31 - Fonctions convexes

Exercice 1 Déterminer les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont concaves, convexes. Déterminer les éventuels points d'inflexions.

- | | | |
|--------------------------------|---|-------------------------|
| 1. $\arctan$ | 4. $\tan$ | 7. $x \mapsto e^{x^2}$ |
| 2. $x \mapsto e^x + e^{-x}$ | 5. $\cos$ | 8. $x \mapsto x $ |
| 3. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ | 6. $x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)$ | 9. $x \mapsto \sqrt{x}$ |

Exercice 2 Montrer que pour tout $(x, y) \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 3 Soit f une fonction polynomiale de degré trois. Montrer que f admet un unique point d'inflexion que l'on déterminera.

Exercice 4 Soit f une fonction convexe strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

1. Montrer que pour tout $x > 1$ on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq f(1) - f(0).$$

2. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Exercice 5

1. Montrer que $x \mapsto x \ln(x)$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout x, y, a, b strictement positifs,

$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right).$$

Exercice 6

1. Étudier la convexité de $f : x \in \mathbf{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$.
2. Soit $x, y \in \mathbf{R}_+$ et $\lambda \in [0, 1]$, montrer que

$$1 + x^\lambda y^{1-\lambda} \leq (1 + x)^\lambda (1 + y)^{1-\lambda}.$$

Exercice 7 Soit X une variable aléatoire réelle finie et ϕ une fonction convexe sur un intervalle I tel que $X(\Omega) \subset I$. Montrer que $\phi(E(X)) \leq E(\phi(X))$.

Exercice 8 Soit ϕ une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\phi\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi\left(f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right).$$

2. En déduire que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \phi(f(t)) dt.$$

Exercice 9 En utilisant une inégalité de convexité, montrer que pour tout réels strictement positifs $x_1, \dots, x_n$,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

On pourra utiliser l'inégalité arithmético-géométrique vue en exemple.

Exercice 10 Soit $f \in C^1(I)$ une fonction convexe sur un intervalle ouvert I . Soit $x_0 \in I$ un point critique de I . Montrer que f admet un minimum global en x_0 .

Temporary page!

L^AT_EX was unable to guess the total number of pages correctly. As there was some unprocessed data that should have been added to the final page this extra page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) this surplus page will go away, because L^AT_EX now knows how many pages to expect for this document.