

TD 4 - Sommes et produits

1. SOMMES ET PRODUITS

Exercice 1 Écrire les quantités suivantes avec les signes somme et produit.

1. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 101$
2. $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10000}$
3. $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}$

Exercice 2 Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=p}^n k$ b) $\prod_{k=p}^n x^k$ c) $\sum_{k=n}^{2n} k$.

Exercice 3 Soit n un entier naturel non nul. Donner une expression des produits suivants à l'aide de factorielles.

a) $\prod_{i=0}^n (1+i)$ b) $\prod_{k=2}^n (k-2)$ c) $\prod_{j=1}^n j^2(j+1)$.

Exercice 4 Calculer les sommes et produits suivants.

a) $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$ b) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$

c) $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ d) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice 5 Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} 3^k$ b) $\sum_{k=0}^n kn$ c) $\sum_{j=1}^n \sqrt{5^j}$

d) $\sum_{k=0}^{2n} (5n+3)$ e) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$ f) $\sum_{i=0}^n \frac{5 \times 4^i - 7 \times 2^{2i}}{3^i}$.

Exercice 6 (*) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k k$.

Indication :

$S_n = \frac{n}{2}$ si n est pair, et $S_n = \frac{-n-1}{2}$ s'il est impair.

Exercice 7 En étudiant la fonction $\sum_{k=0}^n x^k$ et en la dérivant de deux façons différentes, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^n kx^k.$$

Exercice 8

1. Chercher une suite de la forme $(an + b)2^n$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n = (n + 2) \cdot 2^n.$$

2. En déduire la somme

$$\sum_{k=0}^n (k + 2) \cdot 2^k.$$

2.

FACTORIELLES, COEFFICIENTS BINOMIAUX

Exercice 9 Soit $x \in \mathbf{R}_+$, montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 10 Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit les deux produits suivants :

- $P = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n),$
- $P' = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n + 1).$

1. Exprimer P à l'aide d'une factorielle.
2. Exprimer $P \times P'$ à l'aide d'une factorielle.
3. En déduire une expression de P' .

Exercice 11 Exprimer avec des factorielles le produit

$$\prod_{k=3}^n \left(1 - \frac{4}{k^2}\right).$$

Exercice 12 (*) On note S_n la n -ième somme sur une diagonale montante vers le haut et la droite dans le triangle de Pascal. Montrer que $S_0 = S_1$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+2} = S_n + S_{n+1}$.

Exercice 13 Calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 14 Calculer $\sum_{k=0}^n k \cdot k!$.

Exercice 15 Soient p et n deux entiers avec $p \leq n$, montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Exercice 16 En développant $(1+x)^{p+q}$, démontrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

3. SOMMES DOUBLES

Exercice 17 Calculer

$$\text{a) } \sum_{i,j=1}^n i \quad \text{b) } \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} i \quad \text{c) } \sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j) \quad \text{d) } \sum_{i,j=1}^n n^{i+j}.$$

Exercice 18 Calculer

$$\text{a) } \sum_{i,j=1}^n \min(i,j) \quad \text{b) } \prod_{1 \leq i,j \leq n} ij \quad \text{c) } \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} \quad \text{d) } \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \binom{i}{j}.$$

AUTRES EXERCICES

Exercice 19 Soit $x \in]0, +\infty[$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^n kx - 1 \leq \sum_{k=0}^n [kx] \leq \sum_{k=0}^n kx.$$

2. En déduire que la suite (S_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{[kx]}{n^2}.$$

converge et déterminer sa limite.

Exercice 20

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, développer $(k+1)^3 - k^3$.
2. En déduire une démonstration de la somme des carrés consécutifs.