

TD 6 - Ensembles et applications

1. ENSEMBLES

Exercice 1 Les ensembles suivants sont-ils majorés, minorés? Si oui, donner les bornes et dire si elles sont atteintes.

1. $\{x \in \mathbf{R}, \cos(x) = 1\}$,
2. $\{x \in \mathbf{R}_+, \cos(x) = 1\}$,
3. $\{e^{-n}, n \in \mathbf{N}\}$,
4. $\{e^{(-1)^n n}, n \in \mathbf{N}\}$,

Exercice 2 Écrire avec des quantificateurs les sous ensembles des suites réels suivants :

1. A : l'ensemble des suites majorées
2. B : l'ensemble des suites minorées,
3. C : l'ensemble des suites croissantes,
4. D : l'ensemble des suites décroissantes,
5. E : l'ensemble des suites convergentes,
6. F : l'ensemble des suites bornées.

Montrer que $F = A \cap B$. Donner deux autres inclusions vraies et deux inclusions fausses.

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des parties des ensembles $\{0, 1, 2, 3\}$ et $\{A, B, C\}$.

Exercice 4 Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbf{N}$. Donner $\text{card}(E^p)$ et $\text{card}(\mathcal{P}(E^p))$.

Exercice 5 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que $B = C$ si et seulement si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 6 Expliciter les trois ensembles suivants :

$$\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right], \quad \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{p}, \frac{2p+1}{p} \right], \quad \text{et} \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} \left(\left[-k, -\frac{1}{k} \right] \cup \left[\frac{1}{k}, k \right] \right).$$

Exercice 7 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2} \right] \quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2 \right].$$

Exercice 8 Soient A, B, C deux trois parties finies d'un ensemble E . Montrer que

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 9 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E . Établir l'égalité :

$$A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C).$$

2. APPLICATIONS

Exercice 10 Dans chacun des cas, la fonction f de E dans F est-elle injective, surjective, bijective?

1. $E = \mathbf{R}, F = \mathbf{R}, f = \cos,$
2. $E = \mathbf{R}, F = [-1, 1], f = \cos,$
3. $E =]-\pi, \pi[, F = [-1, 1], f = \cos,$
4. $E = F =]0, +\infty[, f(x) = \frac{1}{x},$
5. $E = F = \mathbf{R}^*, f(x) = \frac{1}{x},$
6. $E = \mathbf{R}, F = \mathbf{R}_+, f = \exp.$

Exercice 11

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer $f([-2, 3])$?

2. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, xy - y^3)$. Est-elle injective? surjective?

Exercice 12 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbf{R}$
2. Donner l'image de $\mathbf{R}$ par f .
3. Donner $f(\mathbf{R}_-), f(\mathbf{R}_+)$ et $f([0, 1])$.

Exercice 13 Soit $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $S(n) = n + 1$.

1. Montrer que S est bijective.
2. Que dire de $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$?
3. Que dire de $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?

Exercice 14 Les applications sont elles injectives, surjectives, bijectives? Si elles sont bijectives, donner la bijection réciproque.

1. $f : k \in \mathbb{N} \mapsto 3k + 1 \in \mathbb{N}^*.$
2. $g : \mathbb{R} \setminus \{5\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $g(x) = \frac{3+2x}{x-5}.$
3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $h(y) = \sqrt{y^2 + y + 1}.$
4. $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $i(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}.$
5. $j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $j(x, y) = (x + 2y, 5y - 3x).$

Exercice 15 Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des fonctions.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 16 (*) Soient E, F, G et H des ensembles, $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ trois applications.

1. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. Qu'en est-il de g ?
2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective. Qu'en est-il de f ?
3. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont bijectives. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 17 (*) Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ des fonctions. Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective, alors f et g le sont aussi. (On pourra utiliser le résultats de l'exercice précédent).

3. ENSEMBLES $\mathbb{R}^n$

Exercice 18 Dans chacun des cas suivants, montrer par double inclusion que $A = B$.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ et $B = \{(t, -t), t \in \mathbb{R}\}$.
2. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = z \text{ et } y = 0\}$ et $B = \{(t, 0, t), t \in \mathbb{R}\}$.
3. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - y = 1\}$ et $B = \{(t, t + 1), t \in \mathbb{R}\}$.
4. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 - z = 0\}$ et $B = \{(t, s, -(t^2 + s^2)), (t, s) \in \mathbb{R}^2\}$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les ensembles

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{k=1}^n x_k = 1\}$$

et

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n, \sum_{k=1}^n x_k = 1\}.$$

Montrer que $A = B$.

4. POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 20 (**) Soit A une partie de E , on appelle fonction caractéristique de A l'application f de E dans l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Soit A et B deux parties de E , f et g leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $1 - f$.
2. fg .
3. $f + g - fg$.

Exercice 21 (**) [Différence symétrique de deux ensembles]

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . La différence symétrique de A et B est l'ensemble défini par

$$A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B.$$

1. Montrer que $A \Delta B = B \setminus A \cup A \setminus B$.
2. Faire un dessin!

3. Que dire si $A \Delta B = A \cap B$?
4. Soit C une partie de E . Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si et seulement si $B = C$.
5. Déterminer tous les ensemble de $X \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \Delta X = \emptyset$.