

TD 7 - Suites

1. LIMITES DE SUITES

Exercice 1 Déterminer, si elles existent, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n + \frac{1}{2^n}$,
2. $v_n = 5\ln(n)^3 - \ln(n)^{-2}$
3. $w_n = 5^{-n} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$,
4. $t_n = 5n^2 - 4n^3$.

Exercice 2 Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes.

1. $u_n = \left(\frac{5}{2}\right)^n \times n^2$,
2. $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \times n^2$,
3. $u_n = \sqrt{n}(-2)^n$,
4. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{1000^n}$,
5. $u_n = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n - 5}{5n^2}$,
6. $u_n = \frac{-5n+10}{0,5^n}$.

Exercice 3 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice 4 Déterminer les limites (si elles existent) des suites suivantes.

1. $u_n = -n^4 + n^3 - n^2 + n - 1$,
2. $u_n = \frac{5n^2-1}{3n^2+12n}$,
3. $u_n = \frac{5n^2-1}{3n^3+12n}$,
4. $u_n = \frac{-5n^7-1}{3n^2+12n}$,
5. $u_n = \frac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$,
6. $u_n = \frac{\ln(n)^3 - \ln(n)}{-\ln(n)^2 + 1}$,
7. $u_n = \frac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$,
8. $u_n = \frac{n!}{3^n}$,
9. $u_n = 3n + 1 + \frac{-3}{n^2+1}$.

2. ÉTUDES DE SUITE

Exercice 5 Les suites suivantes sont-elles minorées, majorées, bornées?

1. la suite u définie par $u_n = n^2 + 1$,
2. la suite v définie par $v_n = \frac{n-1}{n+2}$,
3. la suite w définie par $w_n = \cos(n) - n$.

Exercice 6 Les suites suivantes sont-elles monotones, strictement monotones? Préciser la nature de la monotonie.

1. la suite u définie par $u_n = n^2 + 1$,
2. la suite v définie par $v_n = (-1)^n$,
3. la suite w définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{w_n}{2}$,
4. la suite x définie par $x_0 = -1$ et $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$,
5. la suite y définie par $y_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
6. la suite z définie par $z_n = \frac{n-1}{n+2}$.

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

2. Montrer que u_n est croissante.
3. Que peut-on conclure?

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que si (u_n) converge vers une limite ℓ , alors $\ell = 0$.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. Dans cette question $u_0 < 0$. Montrer (u_n) diverge vers $-\infty$.

4. Dans cette question $u_0 \in [0, 1]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, 1]$. Que peut-on conclure?
5. Dans cette question $u_0 > 1$. Quel est le signe de u_1 ? En déduire que la suite a une limite que l'on déterminera.

Exercice 9 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Est-elle majorée, minorée?
3. Conjecturer et démontrer une formule pour u_n .

3. SUITES DE RÉFÉRENCE

Exercice 10 Trouver une expression explicites des suites suivantes :

1. $u_0 = 12$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2$,
2. $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = -3u_n + 1$,
3. $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} + 2u_n = 1$,
4. $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = 3u_{n+1} - 2$,

Exercice 11 On souhaite étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}.$$

1. Si $u_0 = -2$, conjecturer et démontrer le comportement de la suite.
2. Si $u_0 = 3$, montrer que pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.
3. On définit une suite (v_n) par

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que v_n est géométrique et en déduire une expression de v_n en fonction de n .

4. En déduire une expression de u_n .

Exercice 12 En se ramenant à une suite récurrente linéaire d'ordre 2, trouver une formule explicite pour la suite définie par $u_0 = 1$, $u_2 = e$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

4. SUITES ADJACENTES ET MONOTONES

Exercice 13 On définit la suite (u_n) par pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes vers la même limite. Que peut-on en déduire pour (u_n) ?

Exercice 14 Montrer que les suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} \text{ et } u_n = S_n + \frac{1}{n^2}$$

convergent vers la même limite.

Exercice 15 Montrer que les suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$$

convergent vers la même limite.

Exercice 16 Soient a et b deux réels vérifiant $0 < b < a$. Soient (u_n) et (v_n) des suites définies par $u_0 = a \in \mathbf{R}$, $v_0 = b \in \mathbf{R}$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_n = \sqrt{u_n v_n}.$$

Montrer que les suites u et v convergent vers la même limite.

Exercice 17 Soit H_n la suite définie pour $n \geq 1$ par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Montrer que soit H_n converge, soit H_n tend vers $+\infty$,
2. Montrer que quelque soit $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$,
3. En déduire que H_n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 Soit (u_n) une suite croissante convergente vers une limite ℓ . On définit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n+1}$.

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{2n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$.
3. Montrer que (v_n) converge vers ℓ .

5. EXERCICES COMPLÉMENTAIRES

Exercice 19 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$.

1. Soit f la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
Montrer que si $x \in [0, 1]$, alors $f(x) \in [0, 1]$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \in [0, 1]$.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $] -1; +\infty[$.
4. Montrer que (u_n) est décroissante.

5. En déduire que (u_n) converge.
6. Déterminer la limite de (u_n) .

Exercice 20

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$ que l'on note x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ .
4. **(Pour plus tard)** Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 21 On définit une suite (u_n) par

$$u_n = e^{u_n} - 1, \quad u_0 \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la fonction $g : x \in \mathbf{R} \mapsto e^x - 1 - x$. Dresser son tableau variations et son tableau de signe.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que si (u_n) converge, alors $\lim u_n = 0$.
4. Dans cette question, $u_0 \leq 0$. Montrer que (u_n) converge.
5. Dans cette question $u_0 > 0$. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 22 On définit une suite (u_n) par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{u_n}}, \quad u_0 = 1.$$

Montrer que (u_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 23 Soit une suite (u_n) croissante telle que (u_{2n}) converge. Montrer que (u_n) converge.